ブラウン運動論と量子力学（補足）

佐賀大・理工・化学　竹　山　尚　賢

本シリーズ（I）* に対して補足させて頂きます。今後の演算子の関係に関連しますので。

次のことは容易に示すことができる。

いま，q，r を平均時間微分（前及び後向き）が存在する量とする。その時，

$$\left({}^{d}/_{dt}\right) \langle q(t)\, r(t) \rangle = \langle D_f\, q(t) \cdot r(t) \rangle + \langle q(t)\, D_b\, r(t) \rangle \ , \qquad (1)$$

が成立する。ただし，D_f 及び D_b はそれぞれ前向き及び後向きの平均時間微分演算子である。D_f，D_b を時間，位置（時間のみの関数）の関数 f(q(t), t) に作用させると

$$\left.\begin{aligned} D_f\, f(q(t), t) &= \left({}^{\partial}/_{\partial t} + \vec{v}^{(f)} \cdot \nabla + D^{(f)} \triangle\right) f(q(t), t) \ , \\ D_b\, f(q(t), t) &= \left({}^{\partial}/_{\partial t} + \vec{v}^{(b)} \cdot \nabla - D^{(b)} \triangle\right) f(q(t), t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

となる。ここに $D^{(f)}$，$D^{(b)}$ は前向き及び後向きの拡散係数（両者が等しいことはその物理的内容からすぐいえることであるが）。

ここで f(q(t), t)，g(q(t), t) が時間についてコンパクトな集合の閉包をなすもの

$$\int d \langle f g \rangle = 0 \qquad (3)$$

とすると，(1) は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle D_f f \cdot g \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle f D_b g \rangle , \qquad (4 \cdot a)$$

となる。これに位置空間における密度（分布）関数 ρ(q(t), t) を用いて陽に

---

*　物性研究　12，№6（1969）419

書くと

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega} dq\,(D_f f)\, g\rho \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega} dq\; f\, D_f^{+}(g\rho) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega} dq\; f\,(D_f^{*} g)\,\rho \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega} dq\; f\,(D_b\, g)\,\rho
\end{aligned}
\tag{4・b}
$$

と変形される。ただし,

$$
D_f^{+} = -(\partial/\partial t + \vec{v}^{(f)}\cdot\nabla + \mathrm{div}\,\vec{v}^{(f)} - D^{(f)}\triangle)
\tag{4・c}
$$

は D_f の随伴(=転置)演算子であり,また

$$
D_f^{*} \equiv \rho^{-1} D_f^{+} \rho
\tag{4・d}
$$

を定義,導入した。

われわれの目的は,(4・b)により,すなわち,(4・c & d)を用いて

$$
\rho^{-1} D_f^{+} \rho g = - D_b\, g
\tag{5}
$$

の演算子関係により,後向き演算子を前向き演算子によって表現することである。

(5)に(4・c)を用いて具体的に計算すると次式となる。

$$
\begin{aligned}
\rho^{-1} D_f^{+} \rho g &= -(\partial/\partial t + \vec{v}^{(f)}\cdot\nabla \\
&\quad - 2D^{(f)}\nabla \ell n\,\rho\cdot\nabla - D^{(f)}\triangle)\, g \\
&= -(\partial/\partial t + \vec{v}^{(b)}\cdot\nabla - D^{(b)}\triangle)\, g\,,
\end{aligned}
\tag{5'}
$$

ただし,前向き拡散方程式からの関係

$$\rho^{-1}\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div}\vec{v}^{(f)} - \vec{v}^{(f)}\cdot\nabla\ell n\,\rho$$
$$+ D^{(f)}\rho^{-1}\triangle\rho$$

を用いた。

従って（5′）の両辺の各項を等置して次式がえられる。

$$\vec{v}^{(b)} = \vec{v}^{(f)} - 2D^{(f)}\nabla\ell n\,\rho\,, \tag{6}$$

$$\text{or}\quad \vec{u} \equiv (1/2)(\vec{v}^{(f)} - \vec{v}^{(b)})$$
$$= D\nabla\ell n\,\rho\,, \tag{6·a}$$

$$\text{with}\quad D \equiv D^{(f)} = D^{(b)} \tag{6·b}$$

（6·a）は純拡散速度とよんで使ってきた関係である。（I）における導き方では，次のように考えるべきであろう。本来の連続の式は時間反転 $t \to -t$ に対して不変であらねばならぬ。（I·22·a & b）で $\vec{v}_d^{(+)} = (1/2)(\vec{v}^{(f)} + \vec{v}^{(b)}) \equiv \vec{v}$ のみが，$t \to -t$ に対して $\vec{v} \to -\vec{v}$ となり（22·a）は不変に止る。一方（22·b）は明らかに不変性が保たれず，（22′·b）は消え，結局上記（6·a）を与える。