Title	レオロジーの幾何学的研究-XII : 流体系のレオロジー
Author(s)	池田, 恵
Citation	物性研究 (1970), 13(6): 443-452
Issue Date	1970-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/87293
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

レオロジーの幾何学的研究 ― XII

― 流体系のレオロジー ―

東大工　池田　恵

（2月6日受理）

§1. はじめに

レオロジー的物性の一つとして，高分子溶液の非ニュートン粘性や固有粘度などが注目され，種々議論されてきているが，[1),2)] 我々の立場からは，その問題は，粒体・粉体とのモデル的類同性に着目してやって，溶媒中に溶質粒子が浮遊している状態を想定した上で，その粒子の運動形態の特徴を考察していこうとすることに帰着される。孤立鎖粘弾性での取扱いは，粘性流体中に高分子鎖を浸した時の様相を論ずるものであり，その基本的な考え方は，サスペンジョンにおける溶質粒子の運動をとらえることと同じである。そこで我々は，これらをまとめて流体系と呼ぶことにし，流体系の粒子の扱い方をのべると共に，より一般的な応用への移行を期待しつつ，いわゆる流体系の非可逆過程熱力学[3)]への洞察も試みておきたい。

§2. モデルの特徴

高分子溶液にしても，サスペンジョンにしても，着目するのは溶質となるべき分子・粒子の運動形態であり，特に今の場合，粘弾性的挙動が期待されるわけだから，粒子のブラウン運動や流体力学的相互作用などを考慮に入れなければならず，単に剛体球が浮遊しているというだけでは不充分である。

粒子の運動形態の特徴は，変位のみならず，回転を来たすということと，形としては非球形にもなることが相俟って，いわゆる非ホロノーム変形を来たすことである。

粒体力学に於ては，通常，剛体球のかさなりあいによるまさつ力が球表面に作用し，それによる回転が独立につけ加わるということが特徴的であるが，流体系の場合には，そのかわりに流体との交渉と，他粒子からの作用などが存在する。従って，それらの相互作用が働いて，内部回転などの内部自由度が抽出

されて来，非ホロノーム変形が派生することになる。

§3. 流体系での粒子の運動の幾何学的考察について

本質的には，文献 2）の立場と同等であり，その変形の記述にレオノーム幾何学を用いることは大前提である。着目するのは，一個の粒子がいかなる作用力をうけて，いかなる運動方程式に従って運動するかということであり，結論的には，それは，いわゆる二次の order の「道」の方程式，[4),5)] 即ち

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{kj}^{\ i}\,\dot{x}^j\dot{x}^k + \Gamma_j^{\ i}\,\dot{x}^j = F^i \tag{3.1}$$

にまとめられる。[2)]

前節でのべた特徴は，すべて変形即ち座標変換

$$dx^i = A_{j'}^{\ i}(x,\,t)\,dx^{j'} \tag{3.2}$$

の中にとり入れられ，変形 $A_{j'}^{\ i}$ の規定条件を与えることになる。ここでは，レオノーム変換（3.2）に基づく空間構造の構成については省略する。（cf. 6））

粒子体系の記述に都合よいように，粒子に番号づけをして，α番目（α＝1，…，N）の粒子の（i）－座標を x_α^i の如く表わして，これが（x^i，t）－field 中を運動する様相を幾何学的に考えていきたい。（cf. 7））形式的には文献 8）の“directors”の考え方と同じである。

（α）－空間という粒子系は，物理的には各粒子間のある種の相互作用力場を規定するものであり，形態上の特徴を支配するものと考えられる。純変形場は（i）－空間で，そこでの計量を g_{ji} とおくと，

$$g_{\beta\alpha} = x_\beta^j\,x_\alpha^i\,g_{ji} \tag{3.3}$$

によって，（α）－空間の計量 $g_{\beta\alpha}$ と関係づけられ，（x_α^i）－自身が座標変換行列の役目を果していることは“directors”の場合と同様である。

粒子 x_α^i の運動は，幾何学的には（x^i，t）－ field に対する平行移動の概念に集約され，共変微分によって表現されることになる。今それを，

$$\delta x^i_\alpha = dx^i_\alpha + (\Gamma^i_{kj} x^j_\alpha - \Gamma^\beta_{k\alpha} x^i_\beta) dx^k + (\Gamma^i_j x^j_\alpha - \Gamma^\beta_\alpha x^i_\beta) dt \quad (3.4)$$

とおくことにすると，(3.1) に対応して，運動方程式として

$$\ddot{x}^i_\alpha + (\Gamma^i_{kj} \dot{x}^j_\alpha - \Gamma^\beta_{k\alpha} \dot{x}^i_\beta) \dot{x}^k + (\Gamma^i_j \dot{x}^j_\alpha - \Gamma^\beta_\alpha \dot{x}^i_\beta) = F^i_\alpha \qquad (3.5)$$

を得る。[7] 但し F^i_α は粒子への全作用力であり，$\dot{x}^i_\alpha$ は粒子の速度，$\dot{x}^i$ はまわりの流体の速度である。(x^i_α) - 粒子自身のもつ性質は $(\Gamma^i_{kj},\ \Gamma^i_j)$ によってまとめられ，他粒子からの作用は $(\Gamma^\alpha_{k\beta},\ \Gamma^\alpha_\beta)$ によってまとめられることとなる。この式を統計力学的考察と対応させて論ずることにより，各量の物理的解釈を与えることが可能となる。[7),2),12)]

また，(x^i_α) - 粒子自身の支配する，いわば相互作用場についての空間構造は，通常の如く規定されていく。即ち，あくまで (x^i, t) - field を基準にするから，接続係数が

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{k\beta} &= x^\alpha_i x^j_\beta \Gamma^i_{kj} + x^\alpha_i \partial_k x^i_\beta , \\ \Gamma^\alpha_\beta &= x^\alpha_i x^j_\beta \Gamma^i_j + x^\alpha_i \dot{x}^i_\beta \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

で与えられ，(3.4) から共変微分商として

$$\left.\begin{aligned} \nabla_k x^i_\alpha &\equiv \partial_k x^i_\alpha + \Gamma^i_{kj} x^j_\alpha - \Gamma^\beta_{k\alpha} x^i_\beta , \\ \nabla x^i_\alpha &\equiv \dot{x}^i_\alpha + \Gamma^i_j x^j_\alpha - \Gamma^\beta_\alpha x^i_\beta \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

が得られる。その他のテンソル量も，通常の如くに計算してやれば，次のように定義される。

$$\left.\begin{aligned} 2[\nabla_\ell \nabla_k] x^i_\alpha &= R_{\ell kj}^{\cdots i} x^j_\alpha - R_{\ell k\alpha}^{\cdots \beta} x^i_\beta - 2 S_{\ell k}^{\cdot\cdot m} \nabla_m x^i_\alpha , \\ 2[\nabla_\ell \nabla] x^i_\alpha &= P_{\ell j}^{\cdot\cdot i} x^j_\alpha - P_{\ell\alpha}^{\cdot\cdot\beta} x^i_\beta - 2 Q_\ell^{\cdot m} \nabla_m x^i_\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

この時，もう一つのテンソル量たる Euler - Schouten 曲率テンソルは近似的に $\Gamma^\alpha_{k\beta}$, Γ^α_β と同等であることがわかる。

今，簡単のために，それらすべての量を用いて論ずることをやめ，最も特徴的に（x^i_α, $\Gamma^\alpha_{k\beta}$, Γ^α_β）をとりだして，これでもって場を記述していくことを考えたい。つまり，（x^i_α, $\Gamma^\alpha_{k\beta}$, Γ^α_β）による基礎方程式を求めることにしたい。そのために，エネルギー変分原理を用いて，

$$\delta \int_{V\times I} W \ dxdt = \int_{V\times I} \left[\sigma^\alpha_i \delta x^i_\alpha + \mu_\alpha^{\cdot \beta k} \delta \Gamma^\alpha_{k\beta} + \tau_\alpha^{\cdot \beta} \delta \Gamma^\alpha_\beta \right] dxdt = 0 \tag{3.9}$$

の成立を仮定し，通常の如く場の方程式を求めることを試みる。但し，（σ^α_i, $\mu_\alpha^{\cdot\beta k}$, $\tau_\alpha^{\cdot\beta}$）は各々の変形成分に抗する応力成分である。結果のみを記すと，その field－equation は

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^i_\alpha : \ \sigma^\alpha_i - \partial_k \mu_i^{\cdot \alpha k} - \mu_i^{\cdot \beta k} \Gamma^\alpha_{k\beta} - \dot{\tau}_i^{\cdot \alpha} - \tau_i^{\cdot \beta} \Gamma^\alpha_\beta = 0 \\ &\quad \text{但し} \left(\begin{aligned} &\mu_i^{\cdot \alpha k} \equiv \mu_\beta^{\cdot \alpha k} x^\beta_i , \\ &\tau_i^{\cdot \alpha} \equiv \tau_\beta^{\cdot \alpha} x^\beta_i \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

となる。σ^α_i はいわば粒子に働く外力に相当し，$\mu_i^{\cdot\alpha k}$ はモーメント応力としての回転力，$\tau_i^{\cdot\alpha}$ はいわば粒子の運動量成分 $\rho_\alpha \dot{x}^i_\alpha$ に抗する応力（但し，ρ_α は（α）－粒子の質量）とみなされる。

（3.5）と（3.10）との類同は明らかであり，どちらも粒子の運動方程式を与えているものとみなすことができるが，各応力成分への依存性を consti- tutive－equations の形で求めておかないと，その間の関係をつまびらかに論ずることができない。

さて，次に熱力学的な考察についてふれておこう。（cf. 9)）

我々の立場を熱力学的に拡張するためには，大体，文献 10），11）の立場を踏襲すればよいわけである。

（3.10）の場の方程式は，エネルギー函数 W に独立変数として（x^i_α, $\Gamma^\alpha_{k\beta}$, Γ^α_β）を採用したことによって導き出されたわけであるが，そこには熱力学的函数が採用されていない。そこで，これを熱力学的に拡張した場合，時間的変化の割合を用いてやることにして，熱力学第一法則より

$$\rho\dot{E} + \partial_k q^k = \dot{W} \tag{3.11}$$

が成立つ。但し，Eは内部エネルギーで熱力学的項を代表し，q^k は流入せる熱 flux である。ここで $E = E(v, g_{ji}, S)$ とおく。但し，$v \equiv \frac{1}{\rho}$ は specific Volume，g_{ji} は変形場の計量，Sはエントロピーである。この時，

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E} &= \frac{\partial E}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial E}{\partial g_{ji}}\dot{g}_{ji} + \frac{\partial E}{\partial S}\dot{S} \\
&\equiv -P(\partial_k u^k) + E^{ij}\dot{g}_{ji} + T\dot{S} \\
&\text{但し}\begin{cases}
\dfrac{\partial E}{\partial v} \equiv -P & (\text{圧力}) \\
\dot{v} \equiv \partial_k u^k & (\text{体積変化：} u^i \equiv \dot{x}^i) \\
\dfrac{\partial E}{\partial g_{ji}} \equiv E^{ij} & (\text{熱力学的応力}) \\
\dfrac{\partial E}{\partial S} \equiv T & (\text{温度})
\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

とおくことができ，また，$\dot{W}$ の方は (3.10)，(3.6)，(3.3) などを介して，

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \sigma^{\alpha}_{i}\dot{x}^{i}_{\alpha} + \mu^{\cdot\beta k}_{\alpha}\dot{\Gamma}^{\alpha}_{k\beta} + \tau^{\cdot\beta}_{\alpha}\dot{\Gamma}^{\alpha}_{\beta} \\
&\equiv (\sigma^{ij} - \partial_k\mu^{ijk} - \dot{\tau}^{ij})\dot{g}_{ji}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

とかきなおすことが可能である。すべて (x^i_α) によって座標変換されると考えている。

(3.12) と (3.13) を (3.11) に代入すればよいわけだが，ここで問題となるのは $\dot{g}_{ji}$ と $\partial_k u^k$ の関係である。C. Eckart[11] によると，新しく anelasticity tensor a_{ji} なるものを

$$\left.\begin{aligned} &a_{ji} \equiv \frac{1}{2}\,\dot{g}_{ji} + U_{(ji)} \\ &\text{但し,}\quad 2U_{(ji)} \equiv g_{jk}\,\partial_i u^k + g_{ki}\,\partial_j u^k \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

で導入し，従って，

$$\partial_k u^k = g^{ij}\left(a_{ji} - \frac{1}{2}\,\dot{g}_{ji}\right) \tag{3.15}$$

が成立つことを示している。このことは，いわゆる時間微分については Lie-微分を採用することを意味し，Γ^{α}_{β} あるいは Γ^{i}_{j} に条件づけるものである。[5]
(3.14) の a_{ji} は，全変形速度 $\dot{g}_{ji}$ のうち，速度 u^i に依存したホロノームな変形速度成分以外のものを表わしているわけで，時間的変化をとることによる非ホロノーム化を意味する。

(3.12)，(3.13)，(3.15) により，(3.11) は

$$\rho\dot{S} + \partial_k\left(\frac{q^k}{T}\right) = -\frac{1}{T^2}\,g^k\,\partial_k T + \frac{1}{T}\,\dot{g}_{ji}\left(\sigma^{ij} - \partial_k\mu^{ijk} - \dot{\tau}^{ij} - \rho E^{ij} - \frac{1}{2}\,\rho P g^{ij}\right) + \frac{\rho P}{T}\left(g^{ij} a_{ji}\right) \tag{3.16}$$

となる。(3.16) は非負だから，この時は，

$$\left.\begin{aligned} &q_i = -k\,\partial_i T \qquad (k > 0) \\ &\sigma^{ij} = \partial_k\mu^{ijk} + \dot{\tau}^{ij} + \rho E^{ij} + \frac{1}{2}\,\rho P g^{ij} \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

とおける。a_{ji} については (3.14) とおかれているが，(3.16) だけからは (3.17) の如くに決定できない。このことは，Γ^{i}_{j} の規定についても a_{ji} は u^i 以外のものからの寄与を示していることと対応し，また，macro に u^i なる速度場のみに着目していたのでは，自由度が不足して a_{ji} を決定することができないことを意味する。

§ 4. 流体系の非可逆過程熱力学への洞察

我々は，流体系の流動状態を高次空間として把握するわけであり，今までのべてきた議論を，通常の非可逆過程熱力学[3] へ摘用すればどうなるかが問題と

なる。

一般には，ある示量性の量Gに対しての保存則は

$$\frac{\partial(\rho G)}{\partial t} + \partial_k J_G^k - \phi_G = 0 \tag{4.1}$$

とかける。但し，$\rho = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha$ は全体系の質量密度，J_G^k はGなる量の flux，ϕ_G は着目している領域Vで湧出する量である。

前節では（4.1）を介さないで，エネルギー保存則（3.11）から場の方程式，あるいは運動方程式$(3.17)_2$ を求めたが，通常の取扱いでは，すべて（4.1）の各量を適当におきかえることによって，それらの基礎方程式を求めることが行なわれている。その際，基本になるのは，連続の方程式，運動方程式そしてエネルギー輸送方程式の三種である。

（4.1）をみてもわかるとおり，それら三種の方程式は，いずれも macro な領域V全体についての方程式であり，我々のように個別な粒子に着目する立場を（$\sum_{\alpha=1}^{N}$）で総和したものになっている。

まず，連続の方程式は，Gとして $\frac{\rho_\alpha}{\rho}$（重量分率）をとり，J_G^k としては $J_\alpha^k = j_\alpha^k + \rho_\alpha u_\alpha^k$ なる質量流束をとり，（但し，$j_\alpha^k = \rho_\alpha(u_\alpha^k - u^k)$，$u_\alpha^k \equiv \dot{x}_\alpha^k$ で j_α^k は局所質量中心に相対的な拡散流束である）また，ϕ_G としては通常化学反応による湧出を考えるが，[3] ここではそれを省略してやると，（4.1）から

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \partial_k(\rho_\alpha u_\alpha^k) = 0 \\ &\text{あるいは} \\ &\dot{\rho} + \rho\,\partial_k u^k = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

として得られる。

次に，運動方程式は，Gとして ρu^i，J_G^k として $(\rho u^i u^k - \sigma^{ik})$，$\phi_G$ として ρF^i とおいてやると，

$$\frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + \partial_k(\rho u^i u^k) = \rho F^i + \partial_k \sigma^{ik} \tag{4.3}$$

として得られる。但し，F^i は外力，σ^{ij} は通常の意味の応力で $\sigma^{ij}=\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^{ij}$，$F^i=\sum_{\alpha}F_{\alpha}^{i}$ などとかける。従って，改めて u_{α}^{i} についての方程式にかきなおせば，

$$\frac{\partial(\rho_{\alpha}u_{\alpha}^{i})}{\partial t}+\partial_k\{\rho_{\alpha}(u_{\alpha}^{i}u^{k}+u^{i}u_{\alpha}^{k}-u^{i}u^{k})\}=\rho_{\alpha}F_{\alpha}^{i}+\partial_j\sigma_{\alpha}^{ij} \tag{4.4}$$

とかかれ，前節にのべた運動方程式と同等視することができる。今の場合，応力としては σ_{α}^{ij} しか考えていないが，更に μ_{α}^{ijk} や τ_{α}^{ij} などを考慮に入れていくならば，Γ_j^i や Γ_{β}^{α} の縮退と相俟って，より micro な洞察が出来ることとなる。

次に，エネルギー方程式は，G として $\rho(E+\frac{1}{2}u^2)$，j_G^i として $(j_E^i+\rho(E+\frac{1}{2}u^2)u^i-\sigma^{ij}u_j)$，$\phi_G$ として $(\sum_{\alpha}j_{\alpha}^{i}F_{\alpha i}+\rho u^{i}F_i)$ とおいてやると，(4.2)，(4.3) を介して，

$$\rho\dot{E}=\sigma^{ij}\partial_j u_i+\sum_{\alpha}j_{\alpha}^{i}F_{\alpha i}-\partial_k j_E^k \tag{4.5}$$

とかける。但し，E は内部エネルギー，$\mathbf{j}_{\alpha}$ は外力に対する flux，$\mathbf{j}_E$ は内部エネルギー・flux である。

我々は再び各粒子に着目すると，(4.5) に対して，

$$\left.\begin{array}{l}\rho_{\alpha}\dot{E}_{\alpha}=\sigma_{\alpha}^{ij}\partial_j u_{\alpha i}-\partial_k q_{\alpha}^{k}-\partial_k(j_{\alpha}^{k}H_{\alpha})+j_{\alpha}^{i}F_{\alpha i}\\[2ex] \text{但し，}\mathbf{j}_E\equiv\mathbf{q}+\sum_{\alpha}\mathbf{j}_{\alpha}H_{\alpha}\ :\ \left(\begin{array}{l}\mathbf{q}\text{ は heat-flux}\\ H_{\alpha}\text{ は enthalpy}\end{array}\right.\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

となり，(3.11) あるいは (3.16) に帰着させることができる。

文献 3) などでは，内部エネルギーの時間的変化をどうとらえていくかについての議論が詳細に試みられているが，我々の力学的立場からの洞察によって，それらを吟味することも一応は可能であろうが，今は・運動方程式の抽出までの段階として，ここまでの対応づけで終えておきたい。

この種の議論は，孤立鎖粘弾性論において流体力学的相互作用をいかに把握

するかという，対応づけの問題とも関連し，方法論的のみならず，実際の物理的対応を吟味していかねばならない。

§5. 終 り に

今までのべたところは，単に非可逆過程熱力学の数学的表現のまとめともいうべきもので，本質的には，(x^i, t) − field の中の粒子 x^i_α の運動を規定することが問題となる。特に，物理的には粒子への作用力の対応づけが重要である。通常の熱力学的考察の order では，各粒子 x^i_α の総和的寄与を問題にするわけで，我々の取扱いは，それより micro な取扱いとなっていることがわかる。

3節でのべたごとく，熱力学的拡張は，温度TあるいはエントロピーSを独立変数としていかにとり入れていくかにかかっており，方程論的拡張の問題も興味あるところである。[9),3)]

我々のこれからの課題としては，より大きくは，流体系の連続体系としての扱いを我々なりに整備することと，ここでのべた議論をサスペンジョン粒子，粉体流子，孤立鎖各要素などの実際問題に摘用していくことである。

§6. 参 考 文 献

1) 山本三三三，レオロジー，槇書店（1964）.
2) 池田 恵，物性研究，12−4（1969），245.
3) D.D.Fitts, Nonequilibrium Thermodynamics. A Phenomenological Theory of Irreversible Processes in Fluid Systems. McGraw-Hill. 1962.
4) T.Suguri, J.Math, Soc. Japan, 4 (1952), 231.
5) 池田 恵，物性研究，13−1（1969），17.
6) 池田 恵，物性研究，12−3（1969），178.
7) 池田 恵，物性研究，12−5（1969），305.
8) J.L.Ericksen & C.Truesdell, Arch. Rational Mech. Anal., 1 (1958), 295.
9) 池田 恵，物性研究，13−2（1969），103.

池田 恵

10) N.Oshima, Memoirs, 1, D-Ⅵ (1955), 563.

11) C.Eckart, Phys. Rev., 73 (1948), 373.

12) 池田 恵，物性研究，13-4 (1970), 247.