プラズマの非線型な集団励起

早大　相沢洋二

（1月19日受理）

Pines & Bohm は古典力学の方程式から出発して，プラズマ内に線型な集団運動が可能である事を示した。しかし，それらは始めに何らかの仕方で励起される事がなければ，自励的に発振する事がない振動である。この小論では，Pines & Bohm の論文に基礎を置いて，熱的なものとして無視されて来た項を解析する事によって，励起—減衰を，不断に繰り返す非線型な自励振動が可能である事を述べる。

§1. 1952年の論文で，Pines & Bohm は波数 $\mathbf{k}$ に対する電子密度 $\rho_{\mathbf{k}}$ が次の式で決まる事を示した。

$$\frac{d^2\rho_{\mathbf{k}}}{dt^2} = -\sum_i (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} - \sum_{\mathbf{k}',i,j} \frac{4\pi e^2}{mk'^2}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}_i} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}_j} \tag{1}$$

ここで，右の第2項は，random phase approximation から，$\mathbf{k}=\mathbf{k}'$ の項だけの寄与を取り出して，

$$\frac{d^2\rho_{\mathbf{k}}}{dt^2} = -\sum_i (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} - \omega_p^2\rho_{\mathbf{k}} \tag{2}$$

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i}$$

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m}\right)^{1/2}$$

として，さらに $|\mathbf{k}| \ll 1$ の場合に限って，

$$\frac{d^2\rho_{\mathbf{k}}}{dt^2} + \omega_p^2\rho_{\mathbf{k}} = 0 \tag{3}$$

という linear な集団励起が可能である事を示した。(2) 式の ensemble average $<\ >$ を取る事によって

$$\frac{d^2 <\rho_{\mathbf{k}}>}{dt^2} = -<\sum_i (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i}> - \omega_p{}^2 <\rho_{\mathbf{k}}> \qquad (2')$$

として，第1項も考慮する事によって解析を進めよう。

Tschebycheff の定理

$$<\{\sum_i A_i\}^2> = \sum_i <A_i{}^2> \qquad (3)$$

から，

$$-\sum_i <(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i}> = -<\{\sum_i (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i) e^{i\frac{\mathbf{k}}{2}\cdot\mathbf{x}_i}\}^2>$$

$$= 4<(\frac{d}{dt}\sum_i e^{i\frac{\mathbf{k}}{2}\cdot\mathbf{x}_i})^2> = 4<(\frac{d}{dt}\rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}})^2> \qquad (4)$$

となり，さらに

$$<\rho_{\mathbf{k}}> = \sum_i <e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i}> = <\{\sum_i e^{i\frac{\mathbf{k}}{2}\cdot\mathbf{x}_i}\}^2> = <\rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}}{}^2> \qquad (5)$$

となっている。ここで新らしい仮定

$$<\rho_{\mathbf{k}}> = <\rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}}>^2 \qquad (6)$$

をしよう。これについては後の，3－(2) で述べる。これによって，(4) 式は，

$$4<(\frac{d}{dt}\rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}})^2> = \frac{(\frac{d}{dt}<\rho_{\mathbf{k}}>)^2}{<\rho_{\mathbf{k}}>} \qquad (7)$$

となっている。したがって (2)′ 式は $<\rho_{\mathbf{k}}> = X_k$ として，

$$\frac{d^2X_k}{dt^2}=\frac{\left(\frac{dX_k}{dt}\right)^2}{X_k}-\omega_p{}^2X_k \tag{8}$$

のようになる。第1項によって，X＝0が特異点になっている。この（8）式が非線型な集団励起を与える方程式である。

§2. （8）式の解析を行おう。$X_k=A_k\,e^{i\phi_k}$とおいて，方程式（8）に代入すると

$$\begin{cases}\dot{X}=\dot{A}\,e^{i\phi}+\ iA\dot{\phi}\,e^{i\phi}\\ \ddot{X}=\{\ddot{A}+2i\dot{A}\dot{\phi}+iA\ddot{\phi}+(i\dot{\phi})^2A\}\,e^{i\phi}\\ \dfrac{\dot{X}^2}{X}=\dfrac{1}{A}(\dot{A}^2-A^2\dot{\phi}^2+2iA\dot{A}\dot{\phi})\,e^{i\phi}\end{cases} \tag{9}$$

から，（kを省略する），左右の Real Part, Imaginary Part を等しいとすると，

$$\begin{cases}\ddot{A}=\dfrac{\dot{A}^2}{A}-\omega_p{}^2A\\ A\ddot{\phi}=0\end{cases} \tag{10}$$

が導かれる。A≒0の解を考えると，（10）の第2式から，位相部分に対して

$$\phi_k=\omega^*_k\,t+\phi_0 \tag{11}$$

さらに，（10）の第1式を，$dt=\omega_p^{-1}d\tau$ および改めて $d/d\tau=\dot{}$ と書くことにすると，$\dot{A}=B$ として，

$$\dot{B}=\frac{B^2}{A}-A \tag{12}$$

となるから，τ を消して，A－B の位相面で解析すると，図1のようになる。この曲線は，微分方程式

$$\frac{dB}{dA} = \frac{B}{A} - \frac{A}{B} \tag{13}$$

を積分して，積分定数を α として，

$$\alpha = \frac{B^2}{2A^2} + \log A \tag{14}$$

となる。（A ＞ 0 として以下考えている。）

これから，振幅部分 A の閉じたループに対する再帰時間を計算しよう。まづ（14）式で $B = \dot{A}$ に注意すると，

$$\frac{dA}{d\tau} = \sqrt{2A^2(\alpha - \log A)} \tag{15}$$

であるから，再帰時間 T_r は

$$T_r = 2\cdot\int_0^{e^\alpha} \frac{dA}{\sqrt{2A^2(\alpha - \log A)}} \tag{16}$$

$$0 < A < e^\alpha$$

となる。$A = e^\alpha \cdot S$ と変換して

$$T_r = 2\cdot\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2S^2 \log\frac{1}{s}}} \quad ; \ 0 < S < 1$$

$$= 2\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x}} \quad ; \ x = -\log S$$

$$= \infty \tag{17}$$

これは，$A \approx 0$ の近傍で，時間経過が無限大になることによっている。A が最大値になったときからはかった時間を τ とすると，

$$S = e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tag{18}$$

と与えられる。最後になったが，（11）式で現われた，ω_k^* をはっきりと決める方法はみつからないが，分散関係 $\omega=\omega(\mathbf{k})$から決まる $\omega(\mathbf{k})$と同じであると考えるのが適当だと思う。Pines & Bohm によって，$|\mathbf{k}| \ll 0$ で

$$\omega_k^{*2} = \omega_p^{\ 2} + |\mathbf{k}|^2 \langle v^2 \rangle_{AV} \tag{19}$$

と考えられるが証明は出来ない。分散関係（19）から決まる固有振動が，振幅変調図 1 を受けて自励発振をしているというイメージになる。

§3. 2つの点について，議論しよう。

(1) 非線型集団励起について

(2) 仮定（6）について

(1) プラズマに於いて，$\omega=\omega(\mathbf{k})$で与えられる固有振動が存在する事は，多くの線型理論から知られている。そして，その固有振動は生成消滅を繰り返している。例えば Vlasov の方程式から出発した，Landau の理論は，固有振動の Damping を導びいているが，Vlasov の式自体が，Time Reversal な形になっている事から，固有振動の，Growth もあり得る事を示している。

固有振動の励起・減衰は，2つの仕方で生じているだろう。1つは他の固有振動との非線型 Coupling，他の1つは，熱的な Random Force との相互作用。第1の Coupling は，全ての固有モードにエネルギーの等分配を斉らし，第2の Coupling は，全ての固有モードが，減衰して，Collective な様相から，Thermal な様相に変える作用をする。方程式の可逆性は，熱的な様相から，集団的な様相が現われて来る事を示す。方程式（2)′で，第1項を解析したのは，この事情による。

先の解析によると，振幅 A は自励的に振動している。振幅が最大になると，その後は減衰してゆく。位相面（図1）で原点は，特異点であり，トラジェクトリが閉じるまでの時間は，原点で無限大の時間が経過する。したがって．（8）式の集団変数 X_k は，図2の時間変化を示す。しかし，実際は，原点付近

に戻ったとき，今まで無視して来た項が摂動として働く為に，モードは再び励起されて，振動を開始するであろう。しかし，その新らたな励起は，以前のトラジェクトリーと同一のものとは限らない。

ただ，全体系のエネルギー的に許された範囲で，確率的に励起されるだろうから，最大振幅は変ってくる。位相部分の振動数 ω_k^* は，元のままであり，振幅変調の再帰時間も，ほぼ同一であろう。その結果，持続的に，図3のような，集団運動が生じているだろう。

(2) Pines & Bohm によると，$\rho_{\mathbf{k}}$ を，純粋に集団的なもの q_k と，熱的なもの η_k に分離出来て，熱的なものが零の極限で，$\rho_{\mathbf{k}}$ に一致する変数として

$$q_{\mathbf{k}} = \sum_i \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i}}{\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2} \tag{20}$$

がある事が知られている。熱的な部分については，< > を取る事によって落とす事が出来るから

$$q_{\mathbf{k}} = \langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle \tag{21}$$

と考えられる。ところで，Tschebycheff の定理から，$\langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}}{}^2 \rangle$ であるから，$\langle q_{\mathbf{k}} \rangle = q_{\mathbf{k}}$ に注意すると，

$$\langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle = \langle q_{\mathbf{k}} \rangle = \left\langle \sum_i \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i}}{\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \left\{ \sum_i \frac{e^{-i\frac{\mathbf{k}}{2}\cdot\mathbf{x}_i}}{[\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2]^{1/2}} \right\}^2 \right\rangle = \langle q_{\frac{\mathbf{k}}{2}}{}^2 \rangle \tag{22}$$

最後の等式では，$|(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)/\omega| \ll 1$ の場合に，

$$\frac{1}{[\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)^2]^{1/2}} = \frac{1}{[\omega - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)]^{1/2}[\omega + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)]^{1/2}} \cong \frac{1}{\omega^2 - (\frac{\mathbf{k}}{2}\cdot\mathbf{v}_i)^2} \tag{23}$$

を用いた。又，第3番目の等号は，Tschebycheff の定理を再び用いた。

（22）式から，

$$<\rho_{\mathbf{k}}> = <\rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}}>^2$$

となり，これは仮定（6）になっている。

おもわぬ計算違い，考え違いがあるやもしれず，御高批いただければ幸いです。

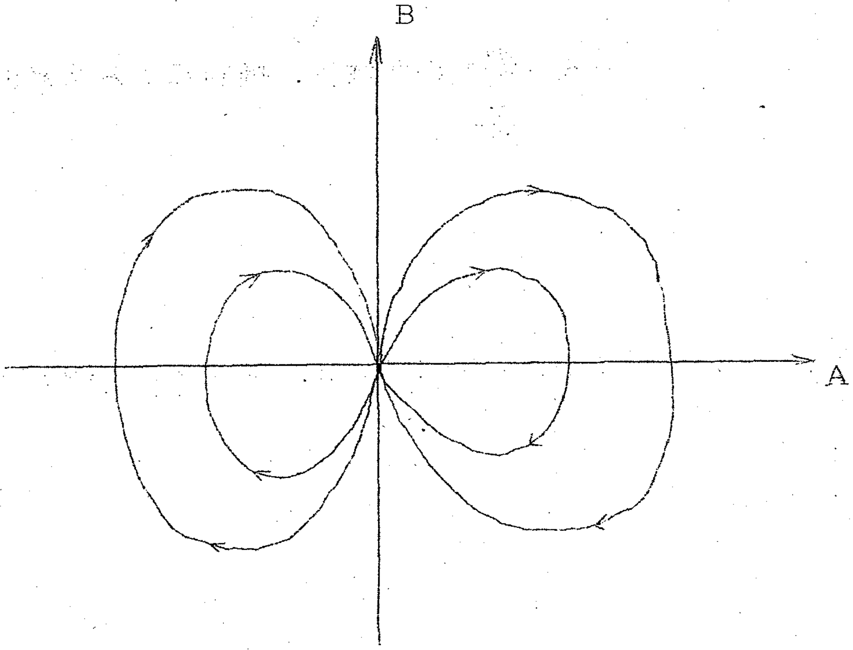

図 1.　$\alpha = \dfrac{B^2}{2A^2} + \log|A|$

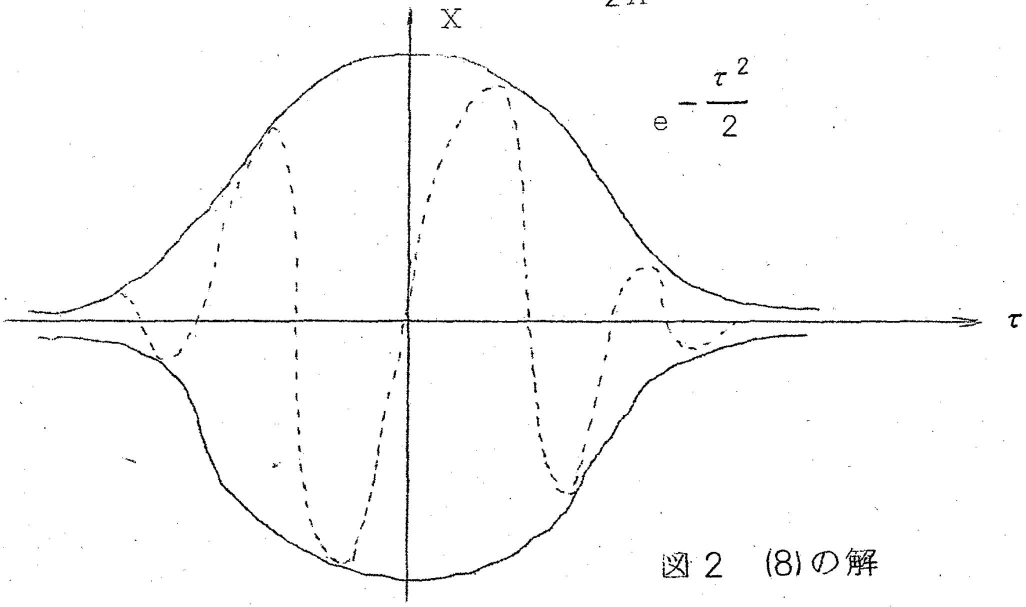

図 2　(8)の解

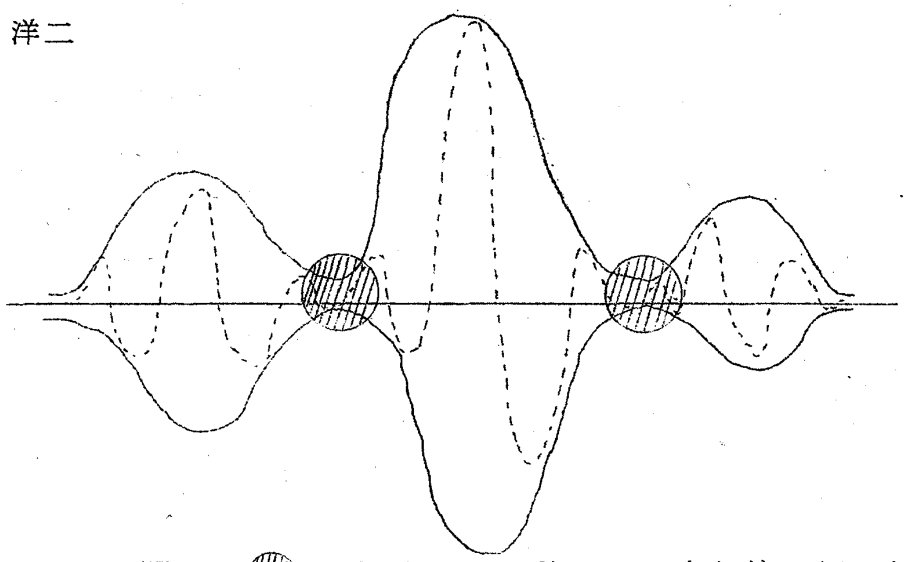

図 3. の領域は，摂動による確率的な領域を示す。

Reference

D. Pines and D. Bohm : Phys. Rev 85 (1952) 338.