An Improvement of the Feynman Action in the Theory of Polaron II.

……… at T finite the Improvement of Osaka's Theory of Polaron State

東大教養・基礎科学科　岡 本 謙 一

（４月１９日受理）

序

我々は先に T＝0°K の場合に４つのパラメーターを用いて Feynman 理論を拡張した。以下これを I と呼ぶ。有限温度の場合も同様の取り扱いは簡単になされて，Osaka 理論の拡張となる。我々は以下 Osaka 理論と平行して，我々の結果を述べる。具体的な数値計算は，後に与えられるであろう。

§１　有限温度の場合の polaron state ……… 自由エネルギーの計算

ポーラロンの密度行列の $\mathbf{X}$ 表示は経路積分法によって，

$$\rho(\mathbf{X},\mathbf{X}';\beta) = \int_0^\beta \exp S \,\mathcal{D}\mathbf{X}_t \quad \mathbf{X}(0) \to \mathbf{X}'(\beta) \tag{1.1}$$

で与えられる。ここに作用 S は

$$S = -\frac{1}{2}\int_0^\beta \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)^2 dt + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{e^\beta}{e^\beta - 1}\int_0^\beta\int_0^\beta |\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s|^{-1} e^{-|t-s|}\,dt\,ds + \frac{1}{e^\beta - 1}\int_0^\beta\int_0^\beta |\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s|^{-1}\, e^{|t-s|}\,dt\,ds\right\} \tag{1.2}$$

である。我々は，$\hbar \to 1$，$m \to 1$，$\omega \to 1$ の単位を取った。m，ω の意味は I と同じである。又，$\beta = \frac{1}{k_B T}$ である。自由エネルギー F は

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{X},\mathbf{X})\,d\mathbf{X}\right) \tag{1.3}$$

で与えられる。Ｉと同様に自由エネルギーに対して変分原理が成立する。

$$\rho(\mathbb{X},\mathbb{X}';\beta) = \int_0^\beta \exp S\, \mathcal{D}\mathbb{X}_t = \int_0^\beta \exp(S-S_1)\exp S_1\, \mathcal{D}\mathbb{X}_t$$

$$= \langle \exp(S-S_1)\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}'} \times \int_0^\beta \exp S_1\, \mathcal{D}\mathbb{X}_t$$

$$\geq \exp\langle S-S_1\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}'} \int_0^\beta \exp S_1\, \mathcal{D}\mathbb{X}_t$$

$$= \exp\langle S-S_1\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}'}\rho_{S_1}(\mathbb{X},\mathbb{X}';\beta) \equiv \rho_{\mathrm{trial}}(\mathbb{X},\mathbb{X}';\beta) \quad (1.4)$$

$\therefore\ F \leq F_{\mathrm{trial}}$ が成立する。 (1.5)

ここに $\langle\cdots\cdots\rangle$ は

$$\langle\cdots\cdots\cdots\rangle \equiv \frac{\int(\cdots\cdots\cdots)\exp S_1\, \mathcal{D}\mathbb{X}_t}{\int \exp S_1\, \mathcal{D}\mathbb{X}_t}$$ である。

我々は S_1 として有限温度の場合

$$S_1 = -\frac{1}{2}\int_0^\beta \left(\frac{d\mathbb{X}}{dt}\right)^2 dt$$

$$-\frac{C_1}{2}\left\{\frac{e^{\beta\omega_1}}{e^{\beta\omega_1}-1}\int_0^\beta\int_0^\beta (\mathbb{X}_t-\mathbb{X}_s)^2 e^{-\omega_1|t-s|} dtds\right.$$

$$\left.+\frac{1}{e^{\beta\omega_1}-1}\int_0^\beta\int_0^\beta (\mathbb{X}_t-\mathbb{X}_s)^2 e^{\omega_1|t-s|} dt\,ds\right\}$$

$$-\frac{C_2}{2}\left\{\frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{\beta\omega_2}-1}\int_0^\beta\int_0^\beta (\mathbb{X}_t-\mathbb{X}_s)^2 e^{-\omega_2|t-s|} dtds\right.$$

$$\left.+\frac{1}{e^{\beta\omega_2}-1}\int_0^\beta\int_0^\beta (\mathbb{X}_t-\mathbb{X}_s)^2 e^{\omega_2|t-s|} dt\,ds\right\} \quad (1.6)$$

なる trial action を用いる。S_1 により決定される運動方程式は，

$$\ddot{\mathbb{X}}_t = \frac{4C_1}{\omega_1}\mathbb{X}_t - 2C_1\int_0^\beta\left\{\frac{e^{\beta\omega_1}}{e^{\beta\omega_1}-1}e^{-\omega_1|t-s|} + \frac{1}{e^{\beta\omega_1}-1}e^{\omega_1|t-s|}\right\}\mathbb{X}_s\, ds$$

$$+\frac{4C_2}{\omega_2}\mathbf{X}_t-2C_2\int_0^\beta\{\frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{\beta\omega_2}-1}e^{-\omega_2|t-s|}+\frac{1}{e^{\beta\omega_2}-1}e^{\omega_2|t-s|}\}\mathbf{X}_s\,ds \quad (1.7)$$

(1.7) より $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(\beta)=\mathbf{X}'$ の境界条件を用いて決定される $\mathbf{X}_t$ を使って,

$$\rho_{S_1}(\mathbf{X},\mathbf{X}';\beta)=\int_0^\beta \exp S_1\,\mathcal{D}\mathbf{X}_t \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{X}(\beta)\dot{\mathbf{X}}(\beta)-\mathbf{X}(0)\dot{\mathbf{X}}(0))\right] \quad (1.8)$$

となる。

S_1 の物理的意味を明らかにするために，次の Lagrangian を考える。これはⅠの図1で示された three-coupled particle model である。

$$L=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}})^2+\frac{M_1}{2}(\dot{R}_1)^2-\frac{\kappa_1}{2}(\mathbf{r}-R_1)^2+\frac{M_2}{2}(\dot{R}_2)^2-\frac{\kappa_2}{2}(\mathbf{r}-R_2)^2 \quad (1.9)$$

この Lagrangian の密度行列が経路積分で計算されると,

$$\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}';\beta)=\mathrm{const}\times\int\exp\Big[-\int_0^\beta(\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}})^2+\frac{1}{2}\kappa_1\mathbf{r}^2+\frac{1}{2}\kappa_2\mathbf{r}^2)\,dt$$

$$+\frac{M_1}{4}\omega_1^2\int_0^\beta\int_0^\beta\{\frac{e^{\beta\omega_1}}{e^{\beta\omega_1}-1}e^{-\omega_1|t-s|}+\frac{1}{e^{\beta\omega_1}-1}e^{\omega_1|t-s|}\}\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(s)\,dtds$$

$$\{+\frac{M_2}{4}\omega_2^2\int_0^\beta\int_0^\beta\{\frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{\beta\omega_2}-1}e^{-\omega_2|t-s|}$$

$$+\frac{1}{e^{\beta\omega_2}-1}e^{\omega_2|t-s|}\}\ \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(s)\,dtds\Big]\mathcal{D}\mathbf{r}(t) \quad (1.10)$$

(1.10) の作用より運動方程式

$$\ddot{\mathbf{r}}_t=\kappa_1\mathbf{r}_t-\frac{M_1\omega_1^3}{2}\int_0^\beta\{\frac{e^{\beta\omega_1}}{e^{\beta\omega_1}-1}e^{-\omega_1|t-s|}+\frac{e^{\omega_1|t-s|}}{e^{\beta\omega_1}-1}\}\mathbf{r}_s\,ds$$

$$-\frac{M_2\omega_2^3}{2}\int_0^\beta\{\frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{\beta\omega_2}-1}e^{-\omega_2|t-s|}+\frac{e^{\omega_2|t-s|}}{e^{\beta\omega_2}-1}\}\mathbf{r}_s\,ds \quad (1.11)$$

が得られ，$\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{r}'$，$\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}$ の境界条件で解かれた（1・10）に最も大きい寄与を与える（1・11）の解を用いて（1・10）は，

$\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}';\beta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{r}(\beta)\dot{\mathbf{r}}(\beta)-\mathbf{r}(0)\dot{\mathbf{r}}(0))\right]$ となる。　(1・12)

$\kappa_1=M_1\omega_1^2, \kappa_2=M_2\omega_2^2, M_1=\frac{4C_1}{\omega_1^3}$，$M_2=\frac{4C_2}{\omega_2^3}$ とおくと，又，$\mathbf{r}'=\mathbf{X}'$，$\mathbf{r}=\mathbf{X}$ とおくと（1・11），（1・12）は（1・7），（1・8）と一致する。従って S_1 の物理的意味は（1・9）の Lagrangian に示されているものであることがわかると同時に action S_1 の経路積分のかわりに Lagrangian L の経路積分を用いることができる。まず $<S-S_1>$ の部分を計算する。

$$
\begin{aligned}
<S-S_1> = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\Big\{ & \frac{e^{\beta}}{e^{\beta}-1}\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}<|\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s|^{-1}> e^{-|t-s|}\,dt\,ds \\
& + \frac{1}{e^{\beta}-1}\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}<|\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s|^{-1}> e^{|t-s|}\,dt\,ds\Big\} \\
+ \frac{C_1}{2}\Big\{ & \frac{e^{\beta\omega_1}}{e^{\beta\omega_1}-1}\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}<(\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s)^2> e^{-\omega_1|t-s|}\,dt\,ds \\
& + \frac{1}{e^{\beta\omega_1}-1}\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}<(\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s)^2> e^{\omega_1|t-s|}\,dt\,ds\Big\} \\
+ \frac{C_2}{2}\Big\{ & \frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{\beta\omega_2}-1}\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}<(\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s)^2> e^{-\omega_2|t-s|}\,dt\,ds \\
& + \frac{1}{e^{\beta\omega_2}-1}\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}<(\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s)^2> e^{\omega_2|t-s|}\,dt\,ds\Big\} \\
= A + B + C &
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

$$
<|\mathbf{X}_\tau-\mathbf{X}_\sigma|^{-1}> = \int\frac{d\mathbf{K}}{2\pi^2K^2}<\exp(i\mathbf{K}(\mathbf{X}_\tau-\mathbf{X}_\sigma))> i
$$

$$
<\exp[i\mathbf{K}(\mathbf{X}_\tau-\mathbf{X}_\sigma)]> = \int\exp S_1\exp\left(\int\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{X}_t\,dt\right)\mathcal{D}\mathbf{X}_t \Big/ \int\exp S_1\,\mathcal{D}\mathbf{X}_t
\tag{1.14}
$$

$\mathbf{f}(t)=i\mathbf{K}(\delta(t-\tau)-\delta(t-\sigma))$ に注意して，（1・14）の経路積分は前と

同様にして，次の Lagrangian L′

$$L'=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}})^2+\frac{2C_1}{\omega_1^3}(\dot{\mathbf{R}}_1)^2-\frac{2C_1}{\omega_1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_1)^2+\frac{2C_2}{\omega_2^3}(\dot{\mathbf{R}}_2)^2-\frac{2C_2}{\omega_2}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_2)^2$$
$$+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{r} \tag{1.15}$$

についての経路積分におきかえられる。I と同様パラメーター $v_\pm$ を導入する。$v_\pm$ は I の (2・9C)，(2・9d) で定義される。L′ を対角化するため，$\mathbf{r}$，$\mathbf{R}_1$，$\mathbf{R}_2$ より変数変換して，$\mathbf{y}_1$，$\mathbf{y}_2$，$\mathbf{y}_3$ へうつる。

$$\mathbf{r}=\mathbf{y}_1-\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)(\omega_1^2-v_-^2)}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{y}_2-\frac{(v_-^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_1^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{y}_1+\frac{\omega_1^2(\omega_1^2-v_-^2)(v_+^2-\omega_2^2)}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{y}_2+\frac{\omega_1^2(v_+^2-\omega_1^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{y}_3$$

$$\mathbf{R}_2=\mathbf{y}_1+\frac{\omega_2^2(\omega_1^2-v_-^2)(v_+^2-\omega_1^2)}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{y}_2+\frac{\omega_2^2(v_-^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_1^2)}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{y}_3 \tag{1.16}$$

Lagrangian L′ は

$$L'=\frac{1}{2}\frac{v_+^2v_-^2}{\omega_1^2\omega_2^2}(\dot{\mathbf{y}}_1)^2+\frac{1}{2}\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)(v_-^2-\omega_1^2)^2}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}(\dot{\mathbf{y}}_2)^2$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(v_-^2-\omega_2^2)(\omega_1^2-v_-^2)(v_+^2-\omega_1^2)^2}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}(\dot{\mathbf{y}}_3)^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(v_+^2-\omega_2^2)(v_+^2-\omega_1^2)(v_-^2-\omega_1^2)^2}{(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}(\mathbf{y}_2)^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(v_-^2-\omega_2^2)(\omega_1^2-v_-^2)(v_+^2-\omega_1^2)^2}{(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}(\mathbf{y}_3)^2+\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_1$$

$$-\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)(\omega_1^2-v_-^2)}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_2+\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_+^2-\omega_1^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_3 \tag{1.17}$$

となる。この Lagrangian によって決定される運動方程式は,

$$\frac{d^2\mathbf{y}_1}{dt^2}=-\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{v_+^2v_-^2}\mathbf{f} \qquad \mathbf{y}_1(0)=\mathbf{y}_1(\beta)=\mathbf{y}_1$$

$$\frac{d^2\mathbf{y}_2}{dt^2}=v_+^2\mathbf{y}_2+\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2-v_-^2}\mathbf{f} \qquad \mathbf{y}_2(0)=\mathbf{y}_2(\beta)=\mathbf{y}_2$$

$$\frac{d^2\mathbf{y}_3}{dt^2}=v_-^2\mathbf{y}_3+\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2-v_+^2}\mathbf{f} \qquad \mathbf{y}_3(0)=\mathbf{y}_3(\beta)=\mathbf{y}_3 \tag{1.18}$$

(1.18) の解を用いて $<\exp[iK(X_\tau-X_\sigma)]>$ は

$$<\exp[iK(X_\tau-X_\sigma)]>_{\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_3;\beta}$$

$$=\exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{v_+^2v_-^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\mathbf{y}_1(\dot{\mathbf{y}}_1(\beta)-\dot{\mathbf{y}}_1(0))+\frac{1}{2}\int_0^\beta\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_1\,dt\Big]$$

$$\times\exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)(v_-^2-\omega_1^2)^2}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}\mathbf{y}_2(\dot{\mathbf{y}}_2(\beta)-\dot{\mathbf{y}}_2(0))$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(v_+^2-\omega_2^2)(v_+^2-\omega_1^2)(\omega_1^2-v_-^2)}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\int_0^\beta\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_2\,dt\Big]$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_-^2-\omega_2^2)(v_+^2-\omega_1^2)^2}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}\mathbf{y}_3(\dot{\mathbf{y}}_3(\beta)-\dot{\mathbf{y}}_3(0))\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_-^2-\omega_2^2)(v_+^2-\omega_1^2)}{v_-^2(v_+^2-v_-^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\int_0^\beta \mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_3\,dt\right] \tag{1.19}$$

$\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ を $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ におきかえ $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ について積分すると，

$$<\exp[i\mathbf{K}(\mathbf{X}_\tau-\mathbf{X}_\sigma)]>_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$$

$$=\exp\Big(-\frac{\mathbf{K}^2}{2}\Big[\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{v_+^2v_-^2}|\tau-\sigma|\{1-\frac{|\tau-\sigma|}{\beta}\}$$

$$+\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)}{v_+^3(v_+^2-v_-^2)}\{\coth(\frac{v_+\beta}{2})(1-\mathrm{ch}\,v_+|\tau-\sigma|)+\mathrm{sh}\,v_+|\tau-\sigma|\}$$

$$+\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-^3(v_+^2-v_-^2)}\{\coth(\frac{v_-\beta}{2})(1-\mathrm{ch}\,v_-|\tau-\sigma|)+\mathrm{sh}\,v_-|\tau-\sigma|\}\Big]\Big) \tag{1.20}$$

この結果は $\mathbf{r}$ に依存しない。又 $\mathbf{K}=0$ で両辺一致し，正しく規格化されていることがわかる。従ってAは，

$$A=\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\mathbf{K}}{2\pi^2K^2}\int_0^\beta d\tau\,d\sigma\,\Big(\frac{e^\beta}{e^\beta-1}e^{-|\tau-\sigma|}+\frac{e^{|\tau-\sigma|}}{e^\beta-1}\Big)<\exp[i\mathbf{K}(\mathbf{X}_\tau-\mathbf{X}_\sigma)]>$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\beta\frac{e^\beta}{e^\beta-1}\int_0^\beta d\tau\ e^{-\tau}[G(\tau;\beta)]^{-1/2} \tag{1.21}$$

$$G(\tau;\beta)=\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)}{v_+^2(v_+^2-v_-^2)}\{1-e^{-v_+\tau}+(1-\coth\frac{v_+\beta}{2})(\mathrm{ch}\,v_+\tau-1)\}$$

$$+\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-^3(v_+^2-v_-^2)}\{1-e^{-v_-\tau}+(1-\coth\frac{v_-\beta}{2})(\mathrm{ch}\,v_-\tau-1)\}$$

$$+\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{v_+^2 v_-^2}\tau(1-\frac{\tau}{\beta}) \tag{1.22}$$

(1.20) を K のベキに展開することにより K^2 の係数を比較して $<(\mathbf{X}_\tau-\mathbf{X}_\sigma)^2>$ も得られる。従って，B，C は各々

$$B=\frac{3C_1\beta}{\omega_1}\Big[\frac{1}{(v_+^2-v_-^2)}\Big\{\frac{(v_+^2-\omega_2^2)}{v_+}\coth(\frac{v_+\beta}{2})-\frac{(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-}\coth(\frac{v_-\beta}{2})\Big\}$$
$$-\frac{2\omega_2^2}{\beta\, v_+^2 v_-^2}\Big] \tag{1.23}$$

$$C=\frac{3C_2\beta}{\omega_2}\Big[\frac{1}{(v_+^2-v_-^2)}\Big\{\frac{(v_+^2-\omega_1^2)}{v_+}\coth(\frac{v_+\beta}{2})-\frac{(v_-^2-\omega_1^2)}{v_-}\coth(\frac{v_-\beta}{2})\Big\}$$
$$-\frac{2\omega_1^2}{\beta\, v_+^2\, v_-^2}\Big] \tag{1.24}$$

となる。

$Z_{S_1}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{S_1}(\mathbf{X},\mathbf{X};\beta)\,d\mathbf{X}$ を求めるため，trial action S_1 において，$C_1\rightarrow C_1 r$，$C_2\rightarrow C_2 r$ とおきかえる。

$$Z_{S_1}=\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{X}\int_0^{\beta}\exp\Big[-\frac{1}{2}\int_0^{\beta}(\frac{d\mathbf{X}}{dt})^2dt-\frac{C_1}{2}r\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}dt\,ds\,(\cdots\cdots)$$
$$-\frac{C_2}{2}r\int_0^{\beta}\int_0^{\beta}dt\,ds\,(\cdots\cdots)\Big]\mathcal{D}\mathbf{X}_t \tag{1.25}$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial r}\ell n\, Z_{S_1}=-\frac{1}{r}(B+C) \tag{1.26}$$

が得られる。B，C は v_+，v_-，C_1，C_2 を通して r に依存している。(1.26) を r で積分することにより，

$$\ell n\ Z_{S_1} = -\int_0^1 \frac{d\gamma}{\gamma}(B+C) - \frac{3}{2}\ell n\ (2\pi\beta) \tag{1.27}$$

(1.27)の積分は，一見やっかいだが，初等的な計算で実行できる。その結果

$$\ell n\ Z_{S_1} = -3\ell n\left|\frac{\mathrm{sh}(\frac{v_+\beta}{2})}{\mathrm{sh}(\frac{\omega_1\beta}{2})}\right| - 3\ell n\left|\frac{\mathrm{sh}(\frac{v_-\beta}{2})}{\mathrm{sh}(\frac{\omega_2\beta}{2})}\right| + 3\ell n\left|\frac{v_+v_-}{\omega_1\omega_2}\right| \tag{1.28}$$

$$-\frac{3}{2}\ell n(2\pi\beta)$$

従って（1.21），（1.23），（1,24），（1.28）より

$$F_{trial} = \frac{3}{\beta}\ell n\left|\frac{\mathrm{sh}(\frac{v_+\beta}{2})}{\mathrm{sh}(\frac{\omega_1\beta}{2})}\right| + \frac{3}{\beta}\ell n\left|\frac{\mathrm{sh}(\frac{v_-\beta}{2})}{\mathrm{sh}(\frac{\omega_1\beta}{2})}\right| - \frac{3}{\beta}\ell n\left|\frac{v_+v_-}{\omega_1\omega_2}\right|$$

$$+\frac{3}{2\beta}\ell n(2\pi\beta) - \frac{3}{2\beta}\left(\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{v_+^2v_-^2} - 1\right)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)}{(v_+^2-v_-^2)v_+}\coth\left(\frac{v_+\beta}{2}\right) - \frac{3}{4}\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{(v_+^2-v_-^2)v_-}\coth\left(\frac{v_-\beta}{2}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}-1}\int_0^{\beta} d\tau\ e^{-\tau}\left[G(\tau;\beta)\right]^{-1/2} \tag{1.29}$$

が得られる。$\beta\to\infty$で我々がⅠで求めたエネルギーの表式と一致する。又，$C_2\to 0$の極限をとると，$v_-\to\omega_2$，$v_+\to v_1$で

$$F_{trial} \to \frac{3}{\beta}\ell n\left|\frac{\mathrm{sh}(\frac{v_1\beta}{2})}{\mathrm{sh}(\frac{\omega_1\beta}{2})}\right| - \frac{3}{\beta}\ell n\left|\frac{v_1}{\omega_1}\right| + \frac{3}{2\beta}\ell n\ (2\pi\beta)$$

$$-\frac{3}{4}\frac{(v_1^2-\omega_1^2)}{v_1}\coth\left(\frac{v_1\beta}{2}\right)-\frac{3}{2\beta}\left(\frac{\omega_1^2}{v_1^2}-1\right)$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}-1}v_1\int_0^{\beta}d\tau\, e^{-\tau}\times\Big[\frac{1}{v_1}(v_1^2-\omega_1^2)\{1-e^{-v_1\tau}$$
$$+\left(1-\coth\frac{v_1\beta}{2}\right)(\mathrm{ch}\, v_1\tau-1)\}+\omega_1^2\tau\left(1-\frac{\tau}{\beta}\right)\Big]^{-1/2}$$

となり Osaka と一致する。

エネルギーの方は，$E=\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F_{trial})$ より

$$E=\frac{3}{2\beta}+\frac{3}{2}v_+\coth\left(\frac{v_+\beta}{2}\right)-\frac{3}{2}\omega_1\coth\left(\frac{\omega_1\beta}{2}\right)+\frac{3}{2}v_-\coth\left(\frac{v_-\beta}{2}\right)$$

$$-\frac{3}{2}\omega_2\coth\left(\frac{\omega_2\beta}{2}\right)-\frac{3}{4}\frac{(v_+^2-\omega_1^2)(v_+^2-\omega_2^2)}{v_+(v_+^2-v_-^2)}\Big\{\coth\left(\frac{v_+\beta}{2}\right)$$

$$-\frac{\beta}{2}v_+\,\mathrm{cosech}^2\left(\frac{v_+\beta}{2}\right)\Big\}$$

$$-\frac{3}{4}\frac{(\omega_1^2-v_-^2)(v_-^2-\omega_2^2)}{v_-(v_+^2-v_-^2)}\Big\{\coth\left(\frac{v_-\beta}{2}\right)-\frac{\beta}{2}v_-\,\mathrm{cosech}^2\left(\frac{v_-\beta}{2}\right)\Big\}$$

$$-\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}-1}\left(1-\frac{\beta}{e^{\beta}-1}\right)\int_0^{\sqrt{\beta/2}}dy\, y\left(e^{-y^2}+e^{-(\beta-y^2)}\right)\left[G(y^2;\beta)\right]^{-1/2}$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\beta}}{e^{\beta}-1}\beta\Big\{-\int_0^{\sqrt{\beta/2}}dy\, y\left(e^{-y^2}+e^{-(\beta-y^2)}\right)\left[G(y^2;\beta)\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[G(y^2;\beta)\right]-$$

$$+e^{-\frac{\beta}{2}}\left[G\left(\frac{\beta}{2};\beta\right)\right]^{-1/2}-2\int_0^{\sqrt{\beta/2}}dy\, y\left[G(y^2;\beta)\right]^{-1/2}e^{-(\beta-y^2)}\Big\}\quad(1.30)$$

となる。

$T=0^\circ K$ の場合，我々は4つのパラメーターを用いて Feynman より低いエネルギーの上限を得た。有限温度の場合，変分原理は，自由エネルギーに対して成立していて，エネルギーに対しては，明らかではない。しかし $T=0^\circ K$

の場合同様，我々の結果は Osaka 理論を極限状態（$C_2 \to 0$）で含んでいるゆえ，2つのパラメーターの Osaka 理論を補正することになると思う。具体的な数値計算の結果は，後に与えられるだろう。