

有限体系における中性子輸送

日本原子力研究所 田次 邑吉

(1) 平均自由行路長の数十倍位しかない有限な媒質における粒子の拡散は、系内滞在時間が有限であるから、無限時間平均を前提とするエルゴード性が成立しない。それで、ここでは直接時間経過を追って、粒子の時間空間分布を求める。

(2) 原子炉とは、 U^{238} 、 Pu^{239} 等の有限な大きさの系であり、内部で中性子をネズミ算的に増倍させる一方、余分の中性子を媒質系の境界から放出して、全中性子数をほぼ時間的にバランスさせている。

媒質の核の中性子に対する全断面積を τ (cm^2)とし、核の個数密度を N とすれば、 $\tau N = \sigma$ (cm^{-1})が巨視的断面積となり、 σ^{-1} が中性子の平均自由行路長となる。 σ^{-1} は核半径 \sqrt{r} に比して 10^{10} 位大きい。しかし、媒質の大きさ(系の厚さ) a は、 σ^{-1} の $10 \sim 10^2$ 倍の程度である。

$$\sqrt{r} \text{ (核半径)} \ll \sigma^{-1} \text{ (平均自由行路)} < a \text{ (系の大きさ)} \quad (1)$$

(1)式のような系では、媒質からの中性子の「もれ」が、中性子系の安定性にとって決定的な要素となっており、そのような場合、Boltzmann方程式の適用は十分でないことがMori, et. al. ⁽¹⁾により指適されている。

(3) 中性子の検出は、やはり特殊な核反応が応用され、その核の集団の大きさは、 σ^{-1} 程度か、その2~3倍である。 σ^{-1} 程度の自由行路を持っている中性子系にとって、 σ^{-1} 以下の大きさの検出器は、中性子を孤立したパルスとして把える(集団運動のようなものは把えない)。その同じ大きさを持ったパルス系列の時間的な粗密が物理量となる。

ここでは、初期条件として中性子が時空間の一点 $\delta(t)\delta(x-x_0)$ に打ち込まれ、その後の媒質内における中性子の時間空間的な分布(中性子束)が検討される(パルス実験法)。

(4) 媒質に浮んだ中性子系の密度 n は 10^9 位 (flux で 10^{15}) で、大変小さいので中性子相互の衝突は無視しうる。更に、媒質を通じての熱等の feedback を無視する。かくして、中性子系は線型となる。

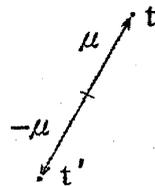
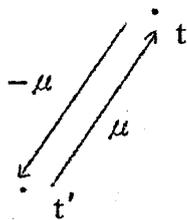
媒質は厚さ a の無限平板 (一次元問題) とする。無限大体系における Boltzmann 方程式を、無媒介的に手直しして、積分型で Asaoka⁽²⁾ により次のように書かれた。

$$f(x, \mu, t) = \frac{vc\sigma}{2} \int_0^a dx' \int_0^t dt' \int_{-1}^1 d\mu' f(x', \mu', t') e^{-v\sigma(t-t')} \delta(x-x'-v\mu(t-t')) + \int_0^a dx' \int_0^t dt' vS(x', \mu, t') e^{-v\sigma(t-t')} \delta(x-x'-v\mu(t-t')). \quad (2)$$

ここで f は中性子束分布, S は外部中性子源の密度分布, σ は巨視的全断面積, C は衝突毎に放出される平均二次中性子数, μ は速度の \cos 方向, v は中性子の早さで不変とし, 散乱, 分裂は等方とした。

(4) 我々は、以下、直接に中性子の媒質内における時間過程を追うために、(2)式を改造するのであるが、その場合、行路は時間的に正しく順序づけらねばならない。

(2)式においては μ の符号の正負によって行路の往復が同じ確率で許されている (Loschmidt の逆行性問題)。媒質が無限大の場合は、中性子の系内滞在時間が無限になって、往復の行路がいつかは同じ確率で実現し、全体として H 定理により不可逆性が成り立つことは良く知られている。ここでは、系内滞在時間がほとんどすべて有限であるから、行路を一重にして正しく時間順序を決めておかねばならない。



第一図

それは、(2)式における δ 関数を次の

$$\delta(x-x'-\frac{\mu}{2}v(t-t')), \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (3)$$

で置き換えればよい。この処置により、行路を力学像と対比することは出来なくなり、時空間の距離と順序が表現されて確率的なものとなる。

(5) ここでは、(3)式で置き換えられた(2)式を、展開して、次の時間過程を追うステップをつくる。

まず、デルタ関数を

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp[izx] \quad (4)$$

とおき、中性子束 f 、外部源 S を

$$\left. \begin{aligned} g(z, \mu, t) &= e^{iaz/2} \int_0^a dx e^{-ixz} f(x, \mu, t) \\ S(z, \mu, t) &= e^{iaz/2} \int_0^a dx e^{-ixz} S(x, \mu, t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と定義しておいて、(2)式の両辺に $\exp[-iyx]$ を操作したものについて、 x と x' についての積分を行う。

$$\begin{aligned} g(y, \mu, t) &= \\ & \frac{vac\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^t dt' \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' g(z, \mu', t') j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right] \exp\left[-v\left(\sigma + iz\frac{\mu}{2}\right)(t-t')\right] + \\ & + \frac{va}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^t dt' S(z, \mu, t') j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right] \exp\left[-v\left(\sigma + iz\frac{\mu}{2}\right)(t-t')\right]. \quad (6) \end{aligned}$$

(6)式において、 $j_0[x] = \sin x/x$ 、第0次の球面ベッセル関数である。

更に、(6)式をラプラス変換するため

$$\left. \begin{aligned} g(y, \mu, s) &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} g(y, \mu, t) \\ S(y, \mu, s) &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} S(y, \mu, t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

と定義すれば, (6)式は次のようになる。

$$g(y, \mu, s) = \frac{\text{vac}\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \int_1^1 d\mu' g(z, \mu', s) \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s+v\sigma+izv\mu/2} +$$

$$+ \frac{va}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz S(z, \mu, s) \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s+v\sigma+izv\mu/2} \quad (8)$$

ここで, 中性子束を Neumann series に書くと⁽³⁾

$$g(y, \mu, s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y, \mu, s) \quad (9)$$

となり, 線型であるから, n は媒質に投入されてからの中性子の衝突回数に対応する。 g_{n+1} と g_n との関係は(8)式から直ちに

$$g_{n+1}(y, \mu, s) = \frac{\text{vac}\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \int d\mu' g_n(z, \mu', s) \cdot \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s+v\sigma+izv\mu/2}, \quad n \geq 0 \quad (10)$$

$$g_0(y, \mu, s) = \frac{va}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz S(z, \mu, s) \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s+v\sigma+izv\mu/2},$$

となる。更に, (10)式から g_n と g_0 との関係が次のようになる。

$$g_n(z, \mu, s) =$$

$$\left(\frac{\text{vac}\sigma}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dz_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \cdot \frac{1}{2} \int_1^1 d\mu_{n-1} \dots \frac{1}{2} \int_1^1 d\mu_1 \frac{1}{2} \int_1^1 d\mu_0 g_0(z_0, \mu_0, s) \cdot$$

$$\times \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z_{n-1}-z)\right]}{s+v\sigma+iz_{n-1}v\mu/2} \cdot \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z_{n-2}-z_{n-1})\right]}{s+v\sigma+iz_{n-2}v\mu_{n-1}/2} \dots \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z_0-z_1)\right]}{s+v\sigma+iz_0v\mu_1/2} \quad (11)$$

以上、すべて Boltzmann 方程式の枠内の話であるが次節でこれらの意味と限界を明らかにしよう。

(5) 短い素過程と長い素過程

(11) 式の次の要素がいわゆる '短い素過程' である。

$$vc\sigma \frac{\frac{a}{2\pi} j_0\left\{\frac{a}{2}(z_{k-1}-z_k)\right\}}{s+v\sigma+i z_{k-1} v\mu_k/2} \quad (12)$$

$vc\sigma$ は一衝突毎に放出する平均二次中性子束であり、分数の項は、自由飛行の過程（と言っても、一様な全断面積 $v\sigma$ で一様に減少している）に、平板からもれていない割合 $a j_0/2\pi$ の重みがついたものである。すなわち、ボルツマン方程式の前提であるエルゴード性⁽⁴⁾（無限時間平均とアンサンブル平均が等しい）により、'もれ' という現実的に時間的に一様でない効果（媒質内を拡散するうちに突然もれ出る）が、各衝突過程に一様に分散されて、あたかも空間的に一様な捕獲反応のように扱われるわけである。

有限な体系に対して、拡散方程式が適用される時、すでにエルゴード性が前提されているものであるが、適当な境界条件のもとで離散的な解を得る。その解の時間についての崩壊定数には、境界の効果は時間的に一様にぬりつぶされてしまう。

ここでは、[媒質への中性子の打ち込み、その後の多重衝突過程（一般に n 回）、そして最後の媒質からもれ出る過程] という長い素過程を直接時間を追って記述する。最後のもれ出る過程以前の多重衝突過程は無限体系におけるものと同じでなければならない。結局、長い素過程 G_{n+1} は次のようになる。

$$G_{n+1} = \left[\lim_{a \rightarrow \infty} g_n \right] \times \text{[短い素過程(12)]} \quad (13)$$

ここで、 $\lim_{a \rightarrow \infty} a \cdot j_0\left\{\frac{a}{2}(z_{k-1}-z_k)\right\} = 2\pi \delta(z_{k-1}-z_k)$ に気をつければ、

$\lim g_n$ は

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} g_n(z, \mu, s) &= \left(\frac{vc\sigma}{2}\right)^n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz_{n-1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \int_{-1}^1 d\mu_{n-1} \cdots \int_{-1}^1 d\mu_0 \lim_{a \rightarrow \infty} g_0(z_0, \mu_0, s) \\
 &\times \frac{\delta(z_{n-1} - z)}{s + v\sigma + iz_{n-1}v\mu/2} \cdot \frac{\delta(z_{n-2} - z_{n-1})}{s + v\sigma + iz_{n-2}v\mu_{n-1}/2} \cdots \frac{\delta(z_0 - z_1)}{s + v\sigma + iz_0v\mu_1/2} \\
 &= \frac{vc\sigma}{s + v\sigma + izv\mu/2} \cdot \left[\frac{c\sigma}{iz} \log \left(\frac{s + v\sigma + izv/2}{s + v\sigma - izv/2} \right) \right]^{n-1} \cdot S(z, s), \quad (14)
 \end{aligned}$$

となり，ここで，

$$S(z, s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \frac{vS(z, \mu, s)}{s + v\sigma + izv\mu/2} \quad (15)$$

である。結局，(13)式は，(10)式の右辺の g_n を $\lim g_n$ で置き換えて

$$G_{n+1}(y, \mu, s) = \frac{vac\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s + v\sigma + izv\mu'/2} \lim_{a \rightarrow \infty} g_n(z, \mu', s), \quad (16)$$

となり，衝突していない項 G_0 は g_0 と一致する。(16)式を

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{n+1} = G - G_0 \quad (17)$$

に従って，重ね合わせると，

$$G(y, \mu, s) = \frac{vac\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz S(z, s) \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s + v\sigma + izv\mu/2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c\sigma}{iz} \log \left(\frac{s + v\sigma + izv/2}{s + v\sigma - izv/2} \right)}$$

$$+\frac{av}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz S(z, \mu, s) \frac{j_0\left[\frac{a}{2}(z-y)\right]}{s+v\sigma+izv\mu/2}, \quad (18)$$

となる。これは積分表式であり、微積分方程式におけるような recurrence の型をとらないのは、素過程を'発生からもれまで'という、繰り返す事のないものをとったからである。

(13)式の $a \rightarrow \infty$ の意味は次のように言えよう。要素(12)は有限系におけるエルゴード性によって得られた自由飛行過程であるが、これは z 面で必ず極を持っている(有限な系の境界とかかわりを持っている)。ここにおいて $a \rightarrow \infty$ とすることにより j_0 関数の巾がなくなり、要素(12)は正則な関数となり、更に z_k で積分することにより各衝突段階が解析接続される。このようにして得られた(18)式の $\left[1 - \frac{c\sigma}{iz} \log\right]^{-1}$ は極を持っているが、それは無限系における無限回衝突過程と対応するものであり、その前項の有限性を規定する部分との関係で、強さは0になる。結局、この \log 項は多価で分岐を持ち、この分岐と有限作用素の極とのかかわり合いにより、全体として、媒質の体系固有の過渡が表現される。参考文献(5)。

(6) 積分の近似計算

(18)式の表現のうちには、打ち込まれてから一度も衝突せずに漏れ出てしまう部分から、定常的な部分まで含んでいて、厳密に積分しても、やはり連続的な過渡が積分型で残って複雑になる。ここでは物理像を明確にするため近似計算を行う。

$t \approx a/v$ 位の時間の短い所では transient が激しいので定常的な部分をひろうため

$$t \ll a/v \ll (v\sigma)^{-1} \quad (19)$$

とすれば、それに対して $s \ll vz \ll v\sigma$ となり、(18)式の被積分関数において、

$$\frac{c\sigma}{iz} \log \left(\frac{s+v\sigma+izv/2}{s+v\sigma-izv/2} \right) \doteq \frac{vc\sigma}{s+v\sigma+vD(z/2)^2}, \quad (20)$$

となる。ここで $D = (3\sigma)^{-1}$ で拡散係数に対応する。更に、定常的な部分をひろうため $(s + v\sigma + izv\mu/2)^{-1}$ の z 面での極を無視して μ で積分し、
 $S(z, \mu, s) = 1$ とすると、

$$G(y, s) = \frac{va}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{j_0\left\{\frac{a}{2}(z-y)\right\}}{s + \alpha + vD(z/2)^2}, \quad (21)$$

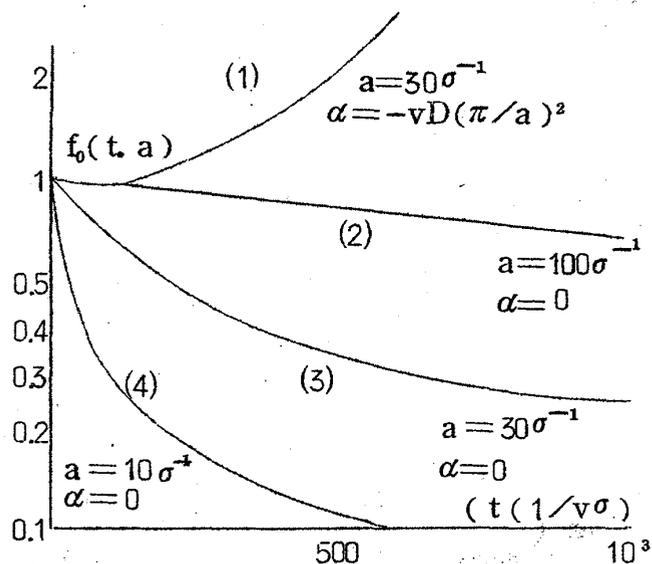
となり、 $\alpha = v\sigma(1-C)$ である。(21)式を時間について逆変換すれば、次のようになる。

$$G(y, t) = \frac{va}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz j_0\left\{\frac{a}{2}(z-y)\right\} e^{-\alpha t - vD\left(\frac{z}{2}\right)^2 t}$$

$$= ve^{-\alpha t} \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{-ixy} [\pi vDt]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{vDt}\right]. \quad (22)$$

(22)式を(5)式と比較すれば、空間分布はガウス型で、平板からはみ出した部分をたち切ったものである。(22)式において $y = 0$ とおけば全空間について積分した形となり、一点炉モデルにおける中性子束 $G(y=0, t)$ の時間的な変化を示し、Fig. (2)に示した。

Fig (2) 横軸の時間は平均自由飛行時間が単位。(1)は即発臨界、(2)(3)(4)は無縁体系が臨界で、それぞれ媒質の厚さは平均自由行路の100, 30, 10倍。



(7) 臨界について

従来，拡散方程式（ボルツマン方程式より近似して求める）により，適当な境界条件のもとで得られる解は，離散的な固有関数の一次結合で得られる。この場合，媒質の内部で生れた中性子は，瞬時に系全体に伝わり，臨界状態では完全に $\frac{dG}{dt} = 0$ が定まった。ここでは，媒質内における伝播が考慮され，空間分布が連続モードになったので，一意に $\frac{dG}{dt} = 0$ にはならず， G のうち $\frac{dG}{dt} = 0$ となる部分をさがすことになる。(22)式から

$$\frac{d}{dt} G(y=0, t) = [-\alpha + vD \left(\frac{d}{da}\right)^2] G(y=0, t) \quad (23)$$

となる。(23)式において， $\frac{dG}{dt} = 0$ とおき， $a = 0$ の時 $G = 0$ とすれば，

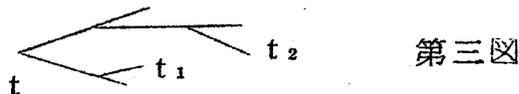
$G(y=0, t) = A \sin(\sqrt{-\alpha/vD} \cdot a)$ ，但し， $\alpha < 0$ ，となり $G(y=0, t) = 0$ となるためには

$$\alpha = -vD \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

となる。これは，従来の時間独立の拡散方程式から得られる臨界量と一致する。

(8) 増倍系における相関々数 $H(t)$ は第3図から

$$H(t_2 - t_1) = C \langle \nu(\nu - 1) \rangle \int_{-\infty}^{t_1} dt G(t_1 - t) G(t_2 - t)$$



の形で求まる。Cは定数で， $\langle \nu(\nu - 1) \rangle$ は核分裂で放出されている中性子数の variance である。参考文献(3)。

田次邑吉

参 考 文 献

- (1) H. Mori, I. Oppenheim, J. Ross, Studies in Statistical Mechanics, Vol. I, Part C. (North-Holland 1962)
- (2) T. Asaoka, Nucl. Sci. Eng., 34, 122(1968)
- (3) Y. Taji, Jou. Nucl. Sci. Technol., 4, 518(1967),
ibid., 5, 374(1968)
- (4) 寺本英, マルコフ過程と力学過程 (槇書店. 1961) 等
- (5) Y. Taji, JAERI-memo 3820(1969)