

Coherent-State Representation の応用

北 大 理 堀 淳 一

1 Coherent state の性質

Coherent state は Boson の消滅演算子の固有状態，あるいは場の相関関数が完全に因子分解されるような状態として定義される。Coherent state が導入されたのは，もともとは統計光学の発展にともなって，古典的な光のコヒーレンスの概念を精密化し，かつ量子力学的に定式化する必要からであったが，最近では光学においてばかりでなく，物性物理のいろんな分野で有用であることがわかってきた。それは，Coherent state が不確定性が最小になる状態，いいかえれば量子効果を完全に含むが，古典的な運動に最も近い状態を表わすために，古典的な状態に近い状態が主要な役割を帯びて登場する現象，またはセミマクロな order parameter が主役を演じる現象を記述するのに適しているからである。古典的な状態に近い状態は，少数の量子状態に非常に多数の boson が集中して存在している状態，すなわち bose 凝縮が起きている状態であるから，bose 凝縮として記述され得る相転移または類似の現象をとり扱かうのにとくに適している，ということもいえる。

Coherent state は互に直交しないので，その意味では overcomplete であるが，これを用いて完全正規直交系の場合とほとんど同じ単位の分解ができるので，任意の状態を coherent state で表示することができ，種々の operator calculus も，係数が正規直交系の場合に比べてやや複雑になるだけで，自由に展開できる。とくに密度行列の対角表示要素は Wigner の分布関数と同様な擬確率分布関数の役割を果し，任意の物理量の期待値を対応する C 数の期待値として計算することを可能にする。さらにこの擬分布関数またはその特性関数に対する多くの演算がこの表示では C 数を乗ずる演算または微分演算に帰着するために，これらの関数に対する運動方程式が偏微分方程式の形になるという計算技術上の利点もある。

Coherent-state の理論は、もちろんその本来の目的に沿って、統計光学のいろいろな問題の解析に有効に用いられている。黒体輻射の場の統計的特性の解明、光子の検出装置の理論、干渉計の理論、レーザーの理論などがその主なものである。物性物理における応用としては次のようなものがあげられよう。

1. 磁場内の電子。Coherent state は boson の場をとり扱かうのに有用な概念であり、boson とは要するに調和振動であるから磁場内の電子の運動をこれでとり扱かうことは誰でもすぐに思いつくことであり、実察 Malkin, Man'ko¹⁾ などによってすでになされている。しかしこの応用は計算のテクニックの点で若干興味はあるが、結論としては、coherent state が古典的な荷電粒子の磁場内における運動に最も近い不確定性最小の状態を表わすということが確認されるにすぎない。

2. 格子の変形。結晶格子の巨視的な変形は、大きな振幅をもったいくつかの振動モードの重ね合わせ、すなわち多数のフォノンが存在するいくつかのモードの重ね合わせと見ることができるから、coherent state で表示すると都合がよいことが想像できる。その最も簡単な場合として、Kohn と Sherrington²⁾ は、イオン結晶の2種類のイオンが交互に逆むきに変位しているような歪みは、波数ゼロの光学モードにフォノンがbose凝縮している coherent state であることを示した。Sawaya³⁾ はそれを任意の変形に対して一般化した。このことは直ちに、soft mode によって起る強誘電体の相転移現象をbose凝縮として記述することができ、かつ coherent-state 表示がこの場合有用であることを示唆する。これについては目下 Sawaya が研究を進めている。

3. 非調和格子における不可逆過程。非調和格子は不可逆過程を論じるさいに、最も手近なモデルの一つとして従来しばしば用いられて来たが、Carruthers と Dy⁴⁾ は coherent-state 表示を用いてこの問題を論じた。Coherent-state 表示を用いると、擬分布関数を通じて、古典的な master equation との対応関係が明らかになり、量子効果を与える項が分離されて出てくるといふ利点があるが、これらの項のくわしい分析はまだなされていない。

4. 超流動現象の記述。 Landau と Ginzburg は order parameter を導入することによって、超流動を記述する現象論的な方程式を導いたが、order parameter で表わされる状態がコヒーレントな状態またはそれに極めて近いものであることは容易に推察される。Langer⁵⁾ はこのことを実際に示した。

5. レーザーの量子論。 レーザー発振の状態がコヒーレントな状態であることはよく知られているが、coherent-state 表示を用いてこれを完全に量子力学的にとり扱ったのは Haken 等⁶⁾⁻¹²⁾ が最初である。著しいのは、自由エネルギーに対する Landau-Ginzburg の表式と全く同じ表式が、コヒーレント状態の分布関数に対してよい近似で得られることである。レーザー発振の状態が Bose 凝縮の起っている状態であることを考えれば、これはさして不思議なことではないが、全く本質の異なる現象を統一的に眺める可能性を与える意味で興味がある。Bose 凝縮は平衡状態であるのに対して、レーザー発振の状態は定常状態であるから、定常状態と平衡状態とを統一的にとり扱おう可能性も与えるわけであって、松原氏が話されたこととも大きく関連してくる可能性があるであろう。

以上のほかにも種々の応用が考えられるであろう。coherent-state 表示の理論は多体問題の新しい手法を提供するというよりも、むしろ上に述べたように、マクロまたはセミ・マクロな記述が有効な現象に対して新しい見方をもたらすもので、その意味で有用なものと思われる。この意味では、本来の統計光学における応用よりも、物性物理に対する応用の方が興味があるといえるかもしれない。

(1971. 4. 13)

文 献

- 1) A. MALKIN and V. I. MAN'KO, Coherent States of a Charged Particle in a Magnetic Field, Soviet Physics

- JETP 28(1969)527
- 2) W. KOHN and D. SHERRINGTON, Two Kinds of Bosons and Bose Condensates, Rev. Mod. Phys. 42(1970)1
 - 3) Y. SAWAYA, Coherent-State Representation とその物性物理への応用, 1970年度北大MC論文
 - 4) P. CARRUTHERS and K. S. DY, Coherent States and Irreversible Processes in Anharmonic Crystals, Phys. Rev. 147(1966)214
 - 5) J. S. LANGER, Coherent States in the Theory of Superfluidity, Phys. Rev. 167(1968)183
 - 6) W. WEIDLICH and F. HAAKE, Coherence-Properties of the Statistical Operator in a Laser Model, Zeitschrift für Physik 185(1965)30
 - 7) W. WEIDLICH and F. HAAKE, Master-equation for the Statistical Operator of Solid State Laser, Z. f. Phys. 186(1965)203
 - 8) W. WEIDLICH, H. RISKEN and H. HAKEN, Quantum mechanical Solutions of the Laser Masterequation I, Z. f. Phys. 201(1967)396
 - 9) H. HAKEN, H. RISKEN, and W. WEIDLICH, Quantum Mechanical Solutions of the Laser Masterequation III. Exact Equation for a Distribution Function of Macroscopic Variables, Z. f. Phys. 206(1967)355
 - 10) R. GRAHAM and H. HAKEN, Functional Fokker-Planck Treatment of Electromagnetic Field Propagation in a Thermal Medium, Z. f. Phys. 234(1970)193
 - 11) R. GRAHAM and H. HAKEN, Functional Quantum Statistics of Light Propagation in a Two-Level System, Z. f. Phys. 235(1970)166

- 12) R. GRAHAM and H. HAKEN, Laserlight — First Example of a Second-Order Phase Transition Far Away from Thermal Equilibrium, Z. f. Phys. 237 (1970) 31

なお Coherent-state の理論の一般的な解説としては, たとえば次のようなものを挙げることができる :

- 13) J. R. KLAUDER and E. C. G. SUDARSHAN, "Fundamentals of Quantum Optics", (W. A. Benjamin, Inc. 1968)
- 14) R. J. GLAUBER, "Quantum Optics", (Academic Press 1969)
- 15) C. DEWITT, A. BLANDIN, C. COHEN and TANNOUDJI, "Quantum Optics and Electronics" (Gordon and Breach 1965)
- 16) S. M. KAY and A. MAITLAND, "Quantum Optics" (Academic Press 1970)