一次元系における相転移と秩序

東大理　高　橋　　実

§1. 相転移の問題

有限温度では一次元系は相転移を示さないということが数種[1]の問題について厳密な証明がなされていることはよく知られている。Landau Lifshitz[2]はその教科書の中で以前からこのことを指摘している。彼らの考え方は，厳密であるとはいえないけれども非常に直感的で種々の場合にあてはまるのでまずそれを紹介しようと思う。

一次元系において二つの相が存在したとして，その表面エネルギーを ϵ とする。この場合は表面は点をなしているので面というのは必ずしも適切ではないかも知れない。そのような境界がn個あった場合の状態の数は原子の総数をNとすると

$$\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

と書ける。したがって自由エネルギーFは $n \ll N$ ならば

$$F \simeq n\epsilon + nkT \ln \frac{n}{N}$$

と書くことが出来る。Fが最小になるのは

$$n = N e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$$

の場合であるが，この表式では境界がNのオーダーで存在することになり結局全体系は一つの相にすぎないことがわかる。しかし ϵ が無限であるか又はTが零であればnが有限になる可能性がある。そこで長距離相互作用をもつイジング模型を考えて見よう。ハミルトニアンは

$$\mathscr{H} = -\sum_{n<m} J(n-m)(\sigma_n^z \sigma_m^z - 1)。$$

↑↑↑↑↑↓↓↓↓↓ のような境界がある場合の表面エネルギーは

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} n\,J(n)$$

と書ける。又一個スピンが反転するのに要するエネルギーは

$$\varepsilon' = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J(n)$$

である。ε' が無限大であるとすれば有限温度でも状態は常に基底 る ことになるので相転移が起きるためには ε' は有限でなければならない。Kac-Thompson [3] は(1)が発散し(2)が有限であれば有限温度で相転移が起きるであろうと考えた。彼らの推測に従うならば $J(n) = 1/n^S$ のとき $1 < S \leqq 2$ であれば起きることになる。Dyson [4] は $1 < S < 2$ の場合については正しいことを厳密に証明したが $S = 2$ の場合については s－d の問題 [5] との関連もあり非常に興味ある問題であるが厳密な証明はまだなされていない。

§ 2. 絶対零度における一次元系の長距離秩序の問題

§ 2.1. 反強磁性ハイゼンベルグ模型及びハッバード模型

最近接原子間にのみ相互作用の働く非等方的ハイゼンベルグ模型を考えよう。

$$\mathscr{H} = \sum_i \gamma(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$$

とする。$\gamma = 0$ の極限では Ising 模型であり $\gamma = 1$ では等方的ハイゼンベルグ模型となる。$\gamma = 0$ では ground state は明らかに長距離秩序を持つが γ が finite の場合についてはどうであろうか。Bonner-Fisher [6] は，有限個の系について数値実験を行い $a = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \langle \sigma_i^z \sigma_{i+n}^z \rangle$ のふるまいを考察した。その結果 a は $\gamma = 0$ では 1 であり γ がふえるにつれて連続的に減り $\gamma = 1$ では零になるらしいことがわかった。一次元ハッバード模型において電子数が原子数と等しい場合状況は等方的ハイゼンベルグに似て来ることが示されている。[7] 実際 Harris-Lange [8] は相互作用が十分大きい極限では，

有効ハミルトニアンは等方的ハイゼンベルグ模型になることを示している。したがってBonner-Fisher の計算を信用するかぎり，相互作用が十分強い場合のハッバード模型は反強磁性的長距離秩序を示さないと考えられる。また相互作用が弱くなっても反強磁性的な相関が強くなるとは考えられないのでやはり長距離秩序はないと考えられる。

§ 2.2. 一次元ボーズ ガスについて

相互作用がデルタ関数型のボーズ粒子系を考えよう。

$$\mathscr{H} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2C \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j)$$

Cが無限大であれば基底状態の波動函数は周期的境界条件を仮定すれば

$$\psi(x_1 x_2 \cdots\cdots x_N) = C \mid \det e^{ik_j x_l} \mid$$

$$k_j = \frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{L}, \frac{N-3}{2} \cdot \frac{2\pi}{L}, \cdots, -\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{L}$$

と書けることは明らかである。一体のdensity matrix $\rho(x)$ は

$$\rho(x) \equiv \int \psi^*(x_1 + x, x_2, \cdots, x_N)\, \psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)\, dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_N$$

によって定義される。$\rho(x)$ のFourier 変換$\tilde{\rho}(k)$が粒子系の運動量分布を表わすわけであるがもしC = ∞においてもBose 凝縮が起っているとすれば$\tilde{\rho}(k)$はk = 0においてデルタ函数型のpeak があるはずである。波動函数が与えられているので$\rho(x)$を求めることは簡単のように思えるがこの積分は思ったよりむずかしくN → ∞の場合の解析的な形も得られてはいない。しかしながらGirardeau[9] Lenard[10]等の計算によれば$\tilde{\rho}$はk = 0においてデルタ函数型のpeak を持たず $1/\sqrt{|k|}$ の型のpeak を持つことを示した。したがってC = ∞においては，1体のdensity matrix にはoff-diagonal long range order[11]（ODLRO）がないことがわかる。Cが有限の場合もLieb-Linigar[12] によって波動函数が与えられているにもかかわらず

density matrix の計算やODLRO に関する議論はなされていない。

参 考 文 献

1）P. C. Hohenberg, Phys, Rev. 158（1967），383.
W. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Letters 17.（1966），1133.
2）ランダウーリフシッツ，"統計物理学"，岩波書店（1958）下249
3）M. Kac and C. J. Thompson,"Critical behavior of several lattice models with long range interaction"Preprint Rockfeller university, 1968.
4）F. J. Dyson, Commun. Math. Phys. 12（1969），91.
5）P. W. Anderson & G. Yuval, Phys. Rev. Letters 23.（1969），89.
6）J. C. Bonner and M. E. Fisher, Phys. Rev. 135（1964），A640.
7）E. H. Lieb and F. Y. Wu, Phys, Rev. Letters 20（1968），1445.
8）A. B. Harris and R. V. Lange, Phys. Rev. 157（1967），295.
9）M. Girardeau, J. Math, Phys, 1（1960），516.
10）A. Lenard, J. Math. Phys. 5（1964），930.
11）C. N. Yang, Rev. Mod. Phys. 34（1962），694.
12）E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. 130（1963），1605.