二次の order の物理的自由度についての一考察

東理大　理工　　池　田　　恵

（９月１１日受理）

1. はじめに

従来，我々は「点自身が構造をもつ」ことを意識的にとりあげ，いわゆる〝非局所連続体力学〟を展開することに努めてきた。[1)2)] そして，その〝構造〟の物理的対応としては主として方向特性[3)]を取り上げ，それが新しい内部自由度として全体系にどの様な構造的特徴を惹起するかをみてきた。
ところで，その際，今までは内部自由度をひっくるめて一つの方向特性で代表させる立場をとってきたのであるが，では，二つ（以上）の方向性を同時に着目する時はどう考えていったら良いのか。その統一的な方法論的考察は如何なることになるのか。

通常，新しい内部自由度を採用して体系を拡張し，もう一段階，よりミクロに洞察していこうとする場合，次段階の階層を支配する自由度――これを総称して〝二次の order の物理的自由度〟とよんでおく。何故，〝二次〟というかは，前述の如き階層的側面に依ると同時に，次節に述べる様な数学的事情による。――の振舞が問題となる。この論文では，その〝二次の order の物理的自由度〟の振舞を系統的に扱う方法論的考察を試みたい。

2. 数学的背景

では，二次の order の物理的自由度を導入することは，我々の立場から見た時，どの様な数学的拡張を意味するのであろうか。

従来，各点（x^κ）に方向表示ベクトル（p^σ）を付随させ，独立変数としてelement of support（x^κ, p^σ）を採用した体系を展開してきたが，p^σの他にもうひとつの方向特性を採り入れる時は，（$x^\kappa, p^\sigma_{(1)}, p^\rho_{(2)}$）を独立変数とすればよいことは明らかであり，この立場は形式的にはFinsler空間を横の系列（同じ階層の自由度を多

数とり入れていくこと）に拡張したことになる。[4)5)]— 二つ以上のものを同時に考えることも，本質的には以下の考察で間に合う。

即ち，Finsler空間とは二点間の距離（線素の長さ）が，パラメータ t によって

$$S=\int_{t_1}^{t_2} F(x, x^{(1)})\,dt \quad ; \quad x^{(1)} \equiv \frac{dx}{dt} \tag{2. 1}$$

で与えられる様な計量多様体だから，これを上述の如くに拡張することは，いうまでもなく，fundamental function F を $F(x, x^{(1)}, x^{(2)})$ にまで拡張することと同等である。そして，$x^{(2)} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ に対応するのが二次の order の物理的自由度に他ならないから，我々はこのことを先取りして"二次"という言葉を使ったのである。—— 一般的には $F(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})$; $x^{(m)} \equiv \frac{d^m x}{dt^m}$ まで拡張でき，これは縦の系列（よりミクロに高次微分を導入していくこと）の拡張といえ，m次の order の高次接続空間概念[5)]で把握されることになる。

3.　内部自由度の固有法則について

そこで，$x^{(2)}$ の導入がいかなる影響を及ぼすかを基礎論的に考えていこう。[1)2)]

$x^{(\alpha)}(\alpha=1,2)$の振舞についての情報は何によって得られるであろうか。既に度々述べてきた様に，[2)3)] 着目する物理的自由度 $x^{(\alpha)}$ が実体として把握される過程を陽に表わすと，そこに物理的相互作用が介在してき，単なる線素 $dx^{(\alpha)}$では なく，不変量としての線素

$$\left\{\begin{aligned} &\delta x^{\kappa}=dx^{\kappa}, \\ &\delta x^{(\alpha)\kappa}=M^{\alpha\kappa}_{\lambda}\Big(dx^{(\alpha)\lambda}+\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\Lambda^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}\,dx^{(\beta)\mu}\Big), \end{aligned}\right. \tag{3. 1}$$

の形で把握されてくるという前提を認めなければならなくなる。但し，$M^{\alpha\kappa}_{\lambda}$ は は $dx^{(\alpha)\lambda}$ から $\delta x^{(\alpha)\kappa}$ へ変化する際のscale, dimension, などの違いを意味し，$\Lambda^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}$は各自由度間の相互作用を表わす。又，（3. 1）では各階層へのそれより高次の階層からの相互作用を考慮していなく，例えば，

$$\left\{\begin{aligned} &\delta x^{\kappa}=dx^{\kappa}+\Lambda^{0\kappa}_{1\lambda}\,dx^{(1)\lambda}+\Lambda^{0\kappa}_{2\lambda}\,dx^{(2)\lambda}, \\ &\delta x^{(1)\kappa}=M^{1\kappa}_{\lambda}\big(dx^{(1)\lambda}+\Lambda^{1\lambda}_{0\mu}\,dx^{\mu}+\Lambda^{2\lambda}_{2\mu}\,dx^{(2)\mu}\big), \end{aligned}\right. \tag{3. 2}$$

などの形式は考えられていない。その意味で，従来からの我々の自由度の規定，即ち非ホロノーム部分空間分解論による規定，の方がより一般的であるといえる。[6)2)3)] しかしながら，今の場合，着目している階層にはその階層の order に見合った物理的自由度しか導入されないと考えれば，（3. 1）で充分である。幾何学的には，この形式は基接続[5)] の概念に相当し，各自由度の固有な接続関係，従って物理的にいえば固有法則を表わすものである。[2)]

$M^{\alpha\kappa}_{\lambda}$，$\Lambda^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}$ などの相互作用の影響を構造的にみるためには，やはり全体系の接続関係を考えることが必要で，それは独立変数（dx^{κ}，$dx^{(\alpha)\kappa}$）に対して，一般に

$$\left\{\begin{aligned} &DV^{\kappa}=dV^{\kappa}+\sum_{\beta=0}^{2}\overset{(\beta)}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\,V^{\lambda}dx^{(\beta)\mu}\ ; \\ &\qquad dx^{(0)\kappa}\equiv dx^{\kappa},\ \overset{(0)}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda}=\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\ , \end{aligned}\right. \tag{3. 3}$$

と拡張され，これは，又，

$$\left\{\begin{aligned} &DV^{\kappa}=\sum_{\beta=0}^{2}(\nabla^{(\beta)}_{\mu}V^{\kappa})\,\delta x^{(\beta)\mu}\ ; \\ &\qquad \delta x^{(0)\kappa}\equiv\delta x^{\kappa},\ \nabla^{(0)}_{\mu}\equiv\nabla_{\mu}\ , \end{aligned}\right. \tag{3. 4}$$

の形の共変微分商で表わされる。但し，

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla^{(\beta)}_{\mu}V^{\kappa}=V^{\kappa}_{(\beta)\mu}+\overset{(\beta)}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda}V^{\lambda}+\sum_{\gamma=\beta+1}^{M=2}(V^{\kappa}_{(\gamma)\nu}+\overset{(\gamma)}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\nu\lambda}V^{\lambda})\,\Pi^{\gamma\nu}_{\beta\mu}\ ; \\ &\beta=0,1,2\qquad V^{\kappa}_{(\beta)\mu}\equiv\frac{\partial V^{\kappa}}{\partial x^{(\beta)\mu}} \end{aligned}\right. \tag{3. 5}$$

で与えられ，$\Pi^{\gamma\nu}_{\beta\mu}$は

$$M^{\alpha\kappa}_{\lambda}\,dx^{(\alpha)\lambda}=\delta x^{(\alpha)\kappa}+\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\Pi^{\alpha\kappa}_{\beta\lambda}\,\delta x^{(\beta)\lambda} \tag{3. 6}$$

で定義される量である。[5)]

ここまでは全くの一般論であり，$x^{(\alpha)}$ の固有法則は基接続 $\delta x^{(\alpha)}$ で把握され，それの全体構造への反映は（3. 3），（3. 4）の形の接続の中にとりこめられることがわかったが，以下では，この一般論をわかり易くするためと，相互作用の物理的意味を考えるために，外場 $\boldsymbol{E}$ が作用した時，表面に出てくる dipole $\boldsymbol{p}=(p^{\sigma})$ と quadrupole $\boldsymbol{\phi}=(\phi^{\sigma\rho})$ ― order の上での同等性から p^{σ} と $x^{(1)}$，$\phi^{\sigma\rho}$ と

$x^{(2)}$ とを対応させて考える — についての議論にすりかえていきたい。

まず，（3. 1）を修正して

$$\begin{cases} \delta x^{\kappa} = dx^{\kappa}, \\ \delta p^{\sigma} = M^{\sigma}_{\rho}\left(dE^{\rho} + \Lambda^{\rho}_{\lambda}\, dx^{\lambda} \right), \\ \delta \phi^{\sigma\rho} = d\phi^{\sigma\rho} + \Lambda^{\sigma\rho}_{\tau}\, dE^{\tau} + \Lambda^{\sigma\rho}_{\lambda}\, dx^{\lambda}, \end{cases} \qquad (3.\ 7)$$

とかくことにする。但し，簡単のために，$\boldsymbol{\phi}$についての$M^{\sigma\rho}_{\tau\upsilon}$なる係数を $\delta^{\sigma}_{\tau}\,\delta^{\rho}_{\upsilon}$ とおいた。M^{σ}_{ρ} が誘電率を表わす如くに各相互作用係数の物理的意味が対応してくる。次に，（3. 3）に対しては，例えば

$$DV^{\sigma} = dV^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} V^{\rho}\, dx^{\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho} V^{\rho}\, dE^{\tau} + \Gamma^{\sigma}_{\upsilon\tau\rho} V^{\rho}\, d\phi^{\tau\upsilon} \qquad (3.\ 8)$$

が対応し，（3. 4）に対しては

$$DV^{\sigma} = (\nabla_{\mu} V^{\sigma})\,\delta x^{\mu} + (\nabla_{\tau} V^{\sigma})\,\delta p^{\tau} + (\nabla_{\upsilon\tau} V^{\sigma})\,\delta\phi^{\tau\upsilon} \qquad (3.\ 9)$$

が導入され，共変微分商としては

$$\begin{cases} \nabla_{\mu} V^{\sigma} = \left(\dfrac{\partial V^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} V^{\rho}\right) + \left(\dfrac{\partial V^{\sigma}}{\partial E^{\tau}} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho} V^{\rho}\right)\Pi^{\tau}_{\mu} + \left(\dfrac{\partial V^{\sigma}}{\partial \phi^{\tau\upsilon}} + \Gamma^{\sigma}_{\upsilon\tau\rho} V^{\rho}\right)\Pi^{\tau\upsilon}_{\mu}, \\ \nabla_{\tau} V^{\sigma} = \left(\dfrac{\partial V^{\sigma}}{\partial E^{\tau}} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho} V^{\rho}\right) + \left(\dfrac{\partial V^{\sigma}}{\partial \phi^{\upsilon\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\upsilon\phi} V^{\phi}\right)\Pi^{\upsilon\rho}_{\tau}, \\ \nabla_{\tau\rho} V^{\sigma} = \dfrac{\partial V^{\sigma}}{\partial \phi^{\rho\tau}} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho\phi} V^{\phi}, \end{cases} \qquad (3.\ 10)$$

が得られる。又，（3. 6）に対しては

$$
\left\{
\begin{aligned}
& dx^{\kappa} = \delta x^{\kappa}, \\
& M^{\sigma}_{\rho}\, dE^{\rho} = \delta p^{\sigma} + \Pi^{\sigma}_{\lambda}\, dx^{\lambda}, \\
& d\phi^{\sigma\rho} = \delta\phi^{\sigma\rho} + \Pi^{\sigma\rho}_{\lambda}\,\delta x^{\lambda} + \Pi^{\sigma\rho}_{\tau}\,\delta p^{\tau},
\end{aligned}
\right.
\tag{3. 11}
$$

と書けるが，元々の基接続関係（3. 7）と比較することにより，改めて

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \Pi^{\sigma}_{\lambda} \equiv -M^{\sigma}_{\rho}\, \Lambda^{\rho}_{\lambda}, \\
& \Pi^{\sigma\rho}_{\lambda} + \Pi^{\sigma\rho}_{\tau} M^{\tau}_{\phi}\, \Lambda^{\phi}_{\lambda} \equiv -\Lambda^{\sigma\rho}_{\lambda}, \\
& \Pi^{\sigma\rho}_{\tau} M^{\tau}_{\phi} \equiv -\Lambda^{\sigma\rho}_{\phi},
\end{aligned}
\right.
\tag{3. 12}
$$

なる関係を得，（3. 7）の段階での物理的意味からの類推で，Πについてのものが考えられうる。

更に物理的対応を考えていくためには，$p^{\sigma}, \phi^{\sigma\rho}$ についての〝平行〟関係を想定することが必要である。つまり，$p^{\sigma}, \phi^{\sigma\rho}$ がそれぞれの固有法則に従っていると仮定することにより，（3. 10）で規定される共変微分商に物理的条件が添加され，例えば，方向特性としての p^{σ} は，各点での固有方向に向いているから，その意味で〝平行〟といえ，$\nabla_{\mu} p^{\sigma} = 0$ とおける。又，$\nabla_{\tau} p^{\sigma}$ は微視的な相互作用を全て含んだ全誘電率（$\varepsilon^{\sigma}_{\tau}$）に相当してくる。そして，更に(3. 7)から，$\phi^{\sigma\rho}$ から p^{σ} への寄与はないものとされているから $\nabla_{\tau\rho} p^{\sigma} = 0$ とおける。すると，上述の条件は

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \nabla_{\mu} p^{\sigma} = M^{\sigma}_{\rho}\, \Lambda^{\rho}_{\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\, p^{\rho} + \varepsilon^{\sigma}_{\tau}\, \Pi^{\tau}_{\mu} \equiv 0, \\
& \nabla_{\tau} p^{\sigma} = M^{\sigma}_{\tau} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho}\, p^{\rho} \equiv \varepsilon^{\sigma}_{\tau}, \\
& \nabla_{\tau\rho} p^{\sigma} = \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho\phi}\, p^{\phi} \equiv 0
\end{aligned}
\right.
\tag{3. 13}
$$

とかける。同様に，$\phi^{\sigma\rho}$ についても

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\nabla_\mu \phi^{\sigma\rho} = \Lambda^{\sigma\rho}_{\ \ \mu} + \Gamma^{\sigma\rho}_{\mu\upsilon\tau}\,\phi^{\tau\upsilon} + \left(\Lambda^{\sigma\rho}_{\ \ \tau} + \Gamma^{\sigma\rho}_{\tau\upsilon\phi}\,\phi^{\phi\upsilon}\right)\Pi^{\tau}_{\ \mu} + \Pi^{\sigma\rho}_{\ \ \mu} \equiv 0\ ,\\
&\nabla_\tau \phi^{\sigma\rho} = \Lambda^{\sigma\rho}_{\ \ \tau} + \Gamma^{\sigma\rho}_{\tau\upsilon\phi}\,\phi^{\phi\upsilon} + \Pi^{\sigma\rho}_{\ \ \tau} \equiv \varepsilon^{\sigma\rho}_{\ \ \tau}\ ,\\
&\nabla_{\upsilon\tau} \phi^{\sigma\rho} = \delta^{\sigma}_{\upsilon}\,\delta^{\rho}_{\tau} + \Gamma^{\sigma\rho}_{\upsilon\tau\ \psi\phi}\,\phi^{\phi\psi} \equiv \delta^{\sigma}_{\upsilon}\,\delta^{\rho}_{\tau}\ ,
\end{aligned}
\right.
\tag{3. 14}
$$

が仮定できる。$\varepsilon^{\sigma\rho}_{\ \ \tau}$ は E^{τ} の $\phi^{\sigma\rho}$ への寄与の実体形で，quadrupole のための誘電率に相当する。これらにより，各接続係数の物理的意味と函数型が，（3. 12）と併せて規定されてくる。

かくして，$x^{(2)}$（あるいは $\phi^{\sigma\rho}$）の導入によって全体系は一様に拡張され，それが（x, $x^{(1)}$)（あるいは（x^{κ}, p^{σ})）の場に効果を及ぼすのは本質的には基接続を通してであり，その物理的意味は全体系の接続の条件（3. 13)，(3. 14)などを介して考えられるに至った。$x^{(2)}$ に対応する自由度の存在故に，ある物理現象が（x, $x^{(1)}$)の場からはみだしているものとすると，通常はある仮定の下に $x^{(2)}$ を（x, $x^{(1)}$)に結びつけ，その現象を（x, $x^{(1)}$)の場の中に収めんとし，そしてその場の特異な構造に対応させて解釈せんとする。そのことを陽に表わしたのが基接続であり，更に平均化などの実際的な操作によって観測可能な階層まで浮び上がらせてやるのが，全体系としての接続関係の条件であるといえよう。

4. おわりに

二次の order の物理的自由度を導入することは，体系としては Finsler 空間を一歩進めたもので取扱われることがわかり，各自由度 $x^{(\alpha)}$（$\alpha=1,2$）の規定は基接続の概念で系統的に把握されることがいえる。形式としては，より高次の order までも進めることが可能だが，実際の“物理”では，せいぜい二次位までしか必要でないであろう。

又，パラメータとしては，今までは温度とか，時間とか，どれか一つを想定してきたが，同時に二個（以上）のパラメータを考えることも可能で，それに対応する体系も空間論的には考えられ，（2. 1）の積分が多重になって，着目する基本単位が，いわば“線素”から“面素”に拡張されることに対応してくる。その辺の事柄も，$x^{(2)}$ の導入と相俟って，物理的実体の対応がつけば面白い問

題を提起するといえよう。

参　考　文　献

1) 池田恵, Sci. Pap. of the RIPAM, 1−2(1971),3.

2) 池田恵，物性研究，14 − 6 (1970), 419。

3) 池田恵，物性研究，15 − 4 (1971)， 217.

4) Y. Takano, Prog. Theor. Phys., 40 (1968), 1159.

5) M. Kawaguchi, RAAG Memoirs, 3, Misc. − Ⅳ (1962), 718.

6) 池田恵，物性研究，12 − 6 (1969)， 365.