磁場中の電子気体のプラズマ分散

名大・工　　長谷川　武　光

（３月１日　受理）

§１　序　　論

磁場中の電子気体のプラズマの長波長の極限での分散関係に対するexchange scatteringの寄与を，拡張されたRandom Phase Approximationの範囲内で運動方程式の方法を用いて調べた。電子気体のプラズマは最初Bohm & Pines[1]によってR. P. A.で調べられ，exchange scatteringの効果はKanazawa達[2]によってグリーン関数の方法により，波数qの２次に寄与することが見出された。磁場中の電子気体の集団励起スペクトルは初め Zyryanov[3]が R. P. A.で求め，その極からプラズマの分散関係及びダンピングを求めた。Mermin & Canel[4]は複雑な構造をもつR. P. A.でのプラズマの分散関係を詳しく調べ，色々な集団励起状態を示し，又そのダンピングを計算した。我々は Edwards[5]が磁場中のスピン波を求めた方法に類似な運動方程式の方法で Kanazawa達[2]が考えたexchange scatteringの効果を磁場中のプラズマに対して計算した。その結果磁場方向の波数qをもつプラズマの分散関係に対してexchange scatteringはqの２次に寄与し，磁場に垂直方向のそれに対してはqの０次に寄与することがわかった。

§２　定　式　化

磁場中で一辺Lの体積 $\Omega = L^3$ の立方体内に閉込められたN個の電子からなる電子気体を考える。磁場Hに平行なz軸をもつ直交座標系を考える。この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i, s_z) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad , \tag{1}$$

ここでV(r)はクーロン相互作用，$\mathcal{H}_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i, s_z)$は磁場中のｉ番目の電子のハミルトニアンで次の様に与えられる

$$\mathscr{H}_0=\frac{1}{2m_e}\left[p+\frac{e}{c}A(r)\right]^2-g\mu_B s_z H, \tag{2}$$

ここで s_z はスピンオペレーターの z 成分，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{A}(\mathbf{r})=(0, Hx, 0)$ ととる。一電子ハミルトニアン $\mathscr{H}_0$ の固有関数はよく知られた Landau states に対応して次の形をとる。

$$\psi_{n,k_y,k_z,\sigma}=\frac{1}{L}\xi_{n,k_y}(x)\,e^{i(k_y y+k_z z)}\chi_\sigma, \tag{3}$$

ここで $\sigma=+\frac{1}{2}$ 又は $-\frac{1}{2}$，関数 $\xi_{n,k_y}(x)$ は点 $x=-\hbar k_y/(m_e\omega_c)$ に中心をもつ調和振動子の n 番目の規格化された固有関数で次の様に書かれる。

$$\xi_{n,k_y}(x)=\xi_n\left(x+\frac{\hbar k_y}{m_e\omega_c}\right), \tag{4}$$

$$\xi_n(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\;e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}\,H_n(\alpha x), \tag{5}$$

ここで $\alpha=\sqrt{m\omega_c/\hbar}$，$H_n(x)$ はエルミート多項式。k_y, k_z は y，z 方向の周期境界条件に合致する値をとる。又 k_y は $|k_y|<m\omega_c L/(2\hbar)$ の範囲内の値に制限される。χ_σ は規格化されたスピン関数。ω_c はサイクロトン振動数で $eH/(m_e c)$。(3)式に対応した一電子エネルギー $\varepsilon(n, k_z, \sigma)$ は

$$\varepsilon(n,k_z,\sigma)=\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c-g\mu_B\sigma H, \tag{6}$$

これは k_y によらない為 (n, k_z, σ) 状態は縮重度 $m_e\omega_c L^2/h$ をもつ。状態 $\psi_{n,k_y,k_z,\sigma}$ に一電子をつくるフェルミ粒子生成演算子 $C^+_{n,k_y,k_z,\sigma}$ によってハミルトニアン(1)を第2量子化すると

$$\mathcal{H}=\sum_{n,k_y,k_z,\sigma}\varepsilon(n,k_z,\sigma)C^{+}_{n,k_y,k_z,\sigma}C_{n,k_y,k_z,\sigma}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}}{}'v(\mathbf{q})\sum_{\substack{n_1,n_1',n_2,n_2',\\ k_y,k_y',k_z,k_z',\alpha,\beta}}U_{q_x}\begin{pmatrix}n_1', & k_y-q_y\\ n_1', & k_y\end{pmatrix}U_{-q_x}\begin{pmatrix}n_2', & k_y'+q_y\\ n_2, & k_y'\end{pmatrix}\times$$

$$C^{+}_{n_1',k_y-q_y,k_z-q_z,\alpha}C^{+}_{n_2',k_y'+q_y,k_z'+q_z,\beta}C_{n_2,k_y',k_z',\beta}C_{n_1,k_y,k_z,\alpha} \tag{7}$$

ここで

$$U_{q_x}\begin{pmatrix}n, & k_y\\ n', & k_y'\end{pmatrix}=\int dx\ e^{-iq_x x}\,\xi_{n,k_y}(x)\,\xi_{n',k_y'}(x)\ , \tag{8}$$

(7)式の右辺の第２項の n_1 , n_2 , n_1' , n_2' に関する和は正の全ての整数について行う。又 $\mathbf{q}$ の和のプライム記号は $\mathbf{q}=0$ の成分を和から除く意味である。波数 $\mathbf{q}$ をもつ磁場中の電子気体の基準振動の演算子 $A_{\mathbf{q}}$ は一般性を失わないで $\mathbf{q}=(q_x, 0, q_z)$ とおくことができ，

$$A_{\mathbf{q}}=\sum_{\substack{n,m\\ p_y,p_z,\sigma}}f^{\sigma}_{n,m}(p_y,p_z;q_x,q_z)C^{+}_{n,p_y,p_z+q_z,\sigma}C_{m,p_y,p_z,\sigma}, \tag{9}$$

ここで $f^{\sigma}_{n,m}(p_y,p_z;q_x,q_z)$ は関係式

$$\hbar\omega A^{+}_{\mathbf{q}}=[\mathcal{H}, A^{+}_{\mathbf{q}}]\ , \tag{10}$$

を満す様に決められる。ω は基準振動の振動数を与える。(10)式の右辺を計算する際に次の様な拡張された R. P. A.

$$a_i^+ a_j^+ a_\ell a_m = a_i^+ a_m N_j \delta_{j,\ell} - a_i^+ a_\ell N_j \delta_{j,m}$$

$$+ a_j^+ a_\ell N_i \delta_{i,m} - a_j^+ a_m N_i \delta_{i,\ell}, \tag{11}$$

を用いる。但し $N_i = \langle a_i^+ a_i \rangle$ 。すると(10)式から次の f を決める式が得られる。

$$\{\hbar\omega - \varepsilon(n, p_z + q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)\} f^{\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$$

$$= \sum_{\ell_x}{}' v(\ell_x, 0, q_z) \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ k_y, k_z, \alpha}} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, k_y \\ n_2, k_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix} (N_{n_1, k_z, \alpha} -$$

$$N_{n_2, k_z + q_z, \alpha}) f^{\alpha}_{n_2, n_1}(k_y, k_z; q_x, q_z)$$

$$- \sum_{\ell}{}' v(\ell) \sum_{n_1, n_2} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ n_1, p_y + \ell_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_2, p_y + \ell_y \\ m, p_y \end{pmatrix} (N_{n_2, p_z + \ell_z, \sigma} -$$

$$N_{n_1, p_z + \ell_z + q_z, \sigma}) f^{\sigma}_{n_1, n_2}(p_y + \ell_y, p_z + \ell_z; q_x, q_z)$$

$$- \sum_{\ell}{}' v(\ell) \sum_{n_1, n_2} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_2, p_y + \ell_y \\ n, p_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y \\ n_2, p_y + \ell_y \end{pmatrix} N_{n_2, p_z + \ell_z + q_z, \sigma}$$

$$\times f^{\sigma}_{n_1, m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$$

$$+ \sum_{\ell}{}' v(\ell) \sum_{n_1, n_2} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y + \ell_y \\ m, p_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_2, p_y \\ n_1, p_y + \ell_y \end{pmatrix} N_{n_1, p_z - \ell_z, \sigma}$$

$$\times f^{\sigma}_{n, n_2}(p_y, p_z; q_x, q_z). \tag{12}$$

(12)式で右辺の第１項のみ残し第２項以下を無視すると Mermin & Canel[4] の得た R. P. A. での分散関係を得る。そして弱磁場，長波長の極限で第２項以下は第１項に比べて小さいので逐次近似で解く。まず第２項以下を無視して

$$\{\hbar\omega-\varepsilon(n,p_z+q_z,\sigma)+\varepsilon(m,p_z,\sigma)\}f^{\sigma}_{n,m}(p_y,p_z;q_x,q_z)$$

$$=\sum_{\ell_x}{}' v(\ell_x,0,q_z)\sum_{\substack{n_1\, n_2\\ k_y,\, k_z,\sigma}} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, k_y \\ n_2, k_y\end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y\end{pmatrix}(N_{n_1,k_z,\alpha}$$

$$-N_{n_2,k_z+q_z,\alpha})\ f^{\alpha}_{n_2,n_1}(k_y,k_z;q_x,q_z) \tag{13}$$

(13)式の右辺は n, m, p_y, q_x, q_z にのみよるから

$$f^{\sigma}_{n,m}(p_y,p_z;q_x,q_z)=\frac{U_{-q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y\end{pmatrix}\mathscr{N}(q_x,q_z)}{\hbar\omega-\varepsilon(n,p_z+q_z,\sigma)+\varepsilon(m,p_z,\sigma)}, \tag{14}$$

ここで $\mathscr{N}(q_x,q_z)$ は規格化定数，とおいて(13)式に代入すると

$$U_{-q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y\end{pmatrix}\mathscr{N}(q_x,q_z)$$

$$=\sum_{\ell_x}{}' v(\ell_x,0,q_z)\sum_{\substack{n_1,\, n_2\\ k_y,\, k_z,\alpha}} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, k_y \\ n_2, k_y\end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y\end{pmatrix}(N_{n_1,k_z,\alpha}$$

$$-N_{n_2,k_z+q_z,\alpha})\frac{U_{-q_x}\begin{pmatrix} n_1, k_y \\ n_2, k_y\end{pmatrix}\mathscr{N}(q_x,q_z)}{\hbar\omega-\varepsilon(n_2,k_z+q_z,\alpha)+\varepsilon(n_1,k_z,\sigma)}. \tag{15}$$

さて変数変換により

$$\sum_{k_y} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, k_y \\ n_2, k_y \end{pmatrix} U_{-q_x}\begin{pmatrix} n_2, k_y \\ n_1, k_y \end{pmatrix} = \frac{L^2}{2\pi} \frac{m_e \omega_c}{\hbar^2} \delta_{q_x, \ell_x} \left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n_1, 0 \\ n_2, 0 \end{pmatrix} \right|^2 , \tag{16}$$

が成立ち，これを用いて(15)式は

$$1 = \frac{L^2}{2\pi} \frac{m_e \omega_c}{\hbar^2} v(q_x, 0, q_z) \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ k_z, \alpha}} \left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n_1, 0 \\ n_2, 0 \end{pmatrix} \right|^2$$
$$\times \frac{(N_{n_1, k_z, \alpha} - N_{n_2, k_z+q_z, \alpha})}{\hbar\omega - \varepsilon(n_2, k_z+q_z, \alpha) + \varepsilon(n_1, k_z, \alpha)} , \tag{17}$$

となり，この式が R. P. A. でのプラズマの分散関係を与える。ここで $\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n_1, 0 \\ n_2, 0 \end{pmatrix} \right|^2$ は Mermin & Canel [4] の C_{n_1, n_2} に対応する。q_x が小さい時

$$\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ n, 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 1 - \frac{1}{\alpha^2}\left(n + \frac{1}{2}\right) q_x^2 + \frac{(3n^2 + 3n + 1)}{8\alpha^4} q_x^4 + O(q_x^6) , \tag{18}$$

$$\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ n+1, 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n+1, 0 \\ n, 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{(n+1)}{8\alpha^2} q_x^2 - \frac{(n+1)^2}{4\alpha^4} q_x^4 + O(q_x^6) , \tag{19}$$

$$\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ n+2, 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n+2, 0 \\ n, 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{16\alpha^4} q_x^4 + O(q_x^6) , \tag{20}$$

一般に $\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ n+\mu, 0 \end{pmatrix} \right|^2 = A_{n,\mu}\, q_x^{2|\mu|}$, (21)

ここで $A_{n,\mu}$ は定数である。(17)式から q が小さい場合のプラズマの分散関係を求める。まず q ＝ 0 の場合 $n_1 = n_2$ のみ考えて，

$$\frac{m_e \omega_c L^2}{2\pi\hbar} \sum_{n,k_z,\sigma} N_{n,k_z,\alpha} = N \ , \tag{22}$$

を考慮すれば(17)式は

$$1 = \omega_p^2 \left\{ \frac{\sin^2\theta}{\omega^2 - \omega_c^2} + \frac{\cos^2\theta}{\omega^2} \right\} \ , \tag{23}$$

ここで ω_p はプラズマ振動数で $\omega_p = 4\pi N e^2 / (\Omega m)$ で与えられる。

① $H \parallel q$ ($\sin\theta \simeq 0$) の場合

$$\omega_+^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2 \omega_c^2 \sin^2\theta}{\omega_p^2 - \omega_c^2} \ , \tag{24}$$

$$\omega_-^2 = \omega_c^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_c^2 \sin^2\theta}{\omega_p^2 - \omega_c^2} \ , \tag{25}$$

② $H \perp q$ ($\cos\theta \simeq 0$) の場合

$$\omega_+^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2\theta}{\omega_p^2 + \omega_c^2} \ , \tag{26}$$

$$\omega_-^2 = \frac{\omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2\theta}{\omega_c^2 + \omega_p^2} \ , \tag{27}$$

(17)式の $q = 0$ の解に対する q の2次の補正を求める為に $n_1 = n_2, n_2 \pm 1, n_2 \pm 2$ の項を考慮すると

$$\frac{1}{\omega_p^2} = \frac{\cos^2\theta}{\omega^2} + \frac{\sin^2\theta}{\omega^2 - \omega_c^2} + \frac{q^2}{m} \left\{ \frac{6T\cos^4\theta}{\omega^4} + 2T\sin^2\theta \cos^2\theta \frac{3\omega^2 + \omega_c^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)^3} \right.$$

$$\left. + W \sin^2\theta \cos^2\theta \frac{3\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)^2} \right.$$

$$+\frac{3W\sin^2\theta}{(\omega^2-\omega_c^2)(\omega^2-4\omega_c^2)}\Big\} \quad , \tag{28}$$

ここで

$$T=\sum_{\substack{n,k_y,k_z,\\ \alpha}} \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} N_{n,k_z,\alpha} \quad , \tag{29}$$

$$W=\sum_{n,k_y,k_z,\alpha} \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) N_{n,k_z,\alpha} \quad . \tag{30}$$

$H\to 0$ の時，T は運動エネルギーの⅓，W は⅔になる。

① $q \mathbin{/\!/} H$ のとき

$$\omega_+^2 = \omega_p^2 + \frac{6T}{m_e} q^2 \quad , \tag{31}$$

$$\omega_-^2 = \omega_c^2 \quad . \tag{32}$$

② $q \perp H$

$$\omega_+^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 + \frac{3W}{m_e}\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2-3\omega_c^2} q^2 \quad , \tag{33}$$

$$\omega_-^2 = 0 \tag{34}$$

$H\to 0$ のとき ω_+ は Bohm & Pines [1] の結果に一致する。(31)式から(34)式迄の 4 つの式は磁場Hのあるときのプラズマの長波長の極限での R. P. A. による分散関係を与える。

§ 3 Exchange scattering

(12)式の右辺の第 2 項以下が exchange scattering を表わす項で，この項は弱磁場，長波長の極限で第 1 項に比べて小さいので $f^{\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$，$\omega$ をそ

れぞれ $f^{0\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z) + \Delta f^{\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$, $\omega_0 + \Delta\omega$ でおきかえる。 $f^{0\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$, ω_0 は(12)式の右辺の第2項以下を無視した式を満足し, $\Delta f^{\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$, $\Delta\omega$ はexchange scatteringによる補正を表わす。この様においた(12)式の両辺に

$$\frac{U_{q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix}(N_{m,p_z,\sigma} - N_{n,p_z+q_z,\sigma})}{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)}, \tag{35}$$

をかけて n, m, p_y, p_z, σ について和をとる。 $\Delta f^{\sigma}_{n,m}(p_y, p_z; q_x, q_z)$, $\Delta\omega$ に関して1次の項のみ残して

$$\hbar\Delta\omega \sum_{\substack{n,m,\\ p_y, p_z, \sigma}} \frac{\left|U_{q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix}\right|^2 (N_{m,p_z,\sigma} - N_{n,p_z+q_z,\sigma})}{\{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)\}^2}$$

$$= -\sum_{\substack{n, m,\\ p_y, p_z, \sigma}} \sum_{\ell}{}' v(\ell) \sum_{n_1, n_2} \left\{ \frac{U_{q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix} U_{-q_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y+\ell_y \\ n_2, p_y+\ell_y \end{pmatrix}}{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)} \right.$$

$$\times \frac{U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ n_1, p_y+\ell_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_2, p_y+\ell_y \\ m, p_y \end{pmatrix}}{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n_1, p_z+\ell_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(n_2, p_z+\ell_z, \sigma)} (N_{m,p_z,\sigma} - N_{n,p_z+q_z,\sigma})$$

$$\times (N_{n_2, p_z+\ell_z, \sigma} - N_{n_1, p_z+\ell_z, \sigma})$$

$$- \frac{U_{q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix} U_{-q_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y+\ell_y \\ n, p_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y \\ n_2, p_y+\ell_y \end{pmatrix}}{[\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)][\hbar\omega_0 - \varepsilon(n_1, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)]}$$

$$\times N_{n_2, p_z+\ell_z+q_z, \sigma}(N_{m, p_z, \sigma}-N_{n, p_z+q_z \sigma})$$

$$+\frac{U_{q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y \end{pmatrix} U_{-q_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ n_2, p_y \end{pmatrix} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n_1, p_y+\ell_y \\ m, p_y \end{pmatrix} U_{-\ell_x}\begin{pmatrix} n_2, p_y \\ n_1, p_y+\ell_y \end{pmatrix}}{[\hbar\omega_0-\varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma)+\varepsilon(m, p_z, \sigma)][\hbar\omega_0-\varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma)+\varepsilon(n_2, p_z, \sigma)]}$$

$$\times (N_{m, p_z, \sigma}-N_{n, p_z+q_z, \sigma}) N_{n_1, p_z+\ell_z, \sigma} , \tag{36}$$

この式を導く時に(17)式を用いた。変数変換により

$$U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n, p_y \\ m, p_y+\ell_y \end{pmatrix}= e^{i\ell_x \hbar p_y/(m_e\omega_c)} U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, \ell_y \end{pmatrix} , \tag{37}$$

が成立つことがわかる。ここで

$$U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, \ell_y \end{pmatrix}= e^{i\ell_x \hbar \ell_y/(m_e\omega_c)} \int dt \, e^{-i\ell_x t} \xi_n(t+\frac{\hbar\ell_y}{2m_e\omega_c})$$

$$\times \xi_m(t-\frac{\hbar\ell_y}{2m_e\omega_c}) \tag{38}$$

右辺の積分の値は Mermin & Canel [4] の Appendix A の $d_{n,n'}$ に対応している。従って $\ell_x=\ell_\perp \cos\varphi$, $\ell_y=\ell_\perp \sin\varphi$ と書くと

$$U_{\ell_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, \ell_y \end{pmatrix}=e^{i\ell_x \hbar \ell_y/(2m_e\omega_c)} e^{i(m-n)\varphi} U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix} , \tag{39}$$

となる。(37), (39)式を用いるとexchange scatteringによるプラズマの振動数への寄与を与える式(36)は次の様になる。

$$\hbar\Delta\omega \sum_{\substack{n,\ m,\\ p_y, p_z, \sigma}} \frac{\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix} \right|^2 (N_{m, p_z, \sigma} - N_{n, p_z+q_z, \sigma})}{\{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)\}^2}$$

$$= - \sum_{\substack{n,\ m,\\ p_y, p_z, \sigma}} \sum_{\ell}{}' v(\ell) \Big[\sum_{n_1, n_2} \frac{e^{i q_x \hbar \ell_\perp \cos\varphi/(m_e \omega_c)}\ U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix}}{\{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)\}}$$

$$\times \frac{U_{-q_x}\begin{pmatrix} n_1, 0 \\ n_2, 0 \end{pmatrix} U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n & 0 \\ n_1, & 0 \end{pmatrix} U_{-\ell_\perp}\begin{pmatrix} n_2, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix} e^{i\varphi(m-n+n_1-n_2)}}{\{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n_1, p_z+\ell_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(n_2, p_z+\ell_z, \sigma)\}}$$

$$\times (N_{m, p_z, \sigma} - N_{n, p_z+\ell_z, \sigma})(N_{n_2, p_z+q_z, \sigma} - N_{n, p_z+\ell_z+q_z, \sigma})$$

$$+ \sum_{n_1} \frac{\left| U_{q_x}\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix} \right|^2 (N_{m, p_z, \sigma} - N_{n, p_z+q_z, \sigma})}{\{\hbar\omega_0 - \varepsilon(n, p_z+q_z, \sigma) + \varepsilon(m, p_z, \sigma)\}^2} \Big\{ N_{n_1, p_z+\ell_z, \sigma} \left| U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n_1, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$- N_{n_1, p_z+\ell_z+q_z, \sigma} \left| U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n_1, 0 \\ n, 0 \end{pmatrix} \right|^2 \Big\} \Big] . \tag{40}$$

この式は一般の方向の波数 q について評価するのが難しいので q ∥ H と q ⊥ H の２つの場合について考える。

① q ∥ H の場合

$$U_0\begin{pmatrix} n, 0 \\ m, 0 \end{pmatrix} = \delta_{n,m} \quad , \tag{41}$$

を用いると，q が小さい場合を考えて $\Delta\omega$ を q で展開し２次まで求めて

$$\Delta\omega = -\frac{q^2}{2Nm_e\omega_p}\sum_{n,p_y,p_z,\sigma}\sum_{\ell}{}'\, v(\ell)\sum_{n_1}\left|U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix}n_1, 0\\ n, 0\end{pmatrix}\right|^2$$

$$\times\frac{\partial N_{n,p_z,\sigma}}{\partial p_z}\quad\frac{\partial N_{n_1,p_z+\ell_z,\sigma}}{\partial(p_z+\ell_z)}\quad\ell_z p_z\quad. \tag{42}$$

この式を求める時に ω_0 として(24)式により ω_p の値を用いた。(42)式からexchange scatteringの効果は $H=0$ の場合，即ち磁場の無い時の電子気体のプラズマの分散関係の場合の様に波数 q の 2 次に寄与することがわかる。

② $q\perp H$の場合

長波長，弱磁場の場合 R. P. A. で求めたプラズマの分散関係に対する exchange scatteringの補正は

$$\Delta\omega = -\frac{\omega_p^2+2\omega_c^2}{2N\hbar\omega_c\sqrt{\omega_p^2+\omega_c^2}}\sum_{n,p_y,p_z,\sigma}\sum_{\ell}{}'\, v(\ell)\sum_{n_1}($$

$$N_{n+1,p_z,\sigma}-N_{n,p_z,\sigma})\Big[\sqrt{(n+1)(n_1+1)}\;U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix}n, & 0\\ n_1, & 0\end{pmatrix}$$

$$\times U_{-\ell_\perp}\begin{pmatrix}n_1+1, & 0\\ n+1, & 0\end{pmatrix}(N_{n_1+1,p_z+\ell_z,\sigma}-N_{n_1,p_z+\ell_z,\sigma})$$

$$-(n+1)\left(\left|U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix}n_1, & 0\\ n+1, & 0\end{pmatrix}\right|^2-\left|U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix}n_1, & 0\\ n, & 0\end{pmatrix}\right|^2\right)N_{n_1,p_z+\ell_z,\sigma}\Big]. \tag{43}$$

(43)式からわかる様に $q\perp H$の場合にはexchange scatteringは q の 0 次に寄与する。しかし磁場Hを零とすると次の理由で(43)式で与えられる $\Delta\omega$ は消える。このことは磁場の無い時の電子気体のプラズマの分散関係に対する exchange scattering の寄与は波数 q の 2 次から始まることから当然である。フェルミ分布関数を $f(\varepsilon)$ とかくと $H\to 0$ の極限で

$$N_{n+1,\,p_z,\sigma}-N_{n,p_z,\sigma}=f\left(\frac{\hbar^2 p_z^2}{2m_e}+(n+1+\frac{1}{2})\hbar\omega_c-g\mu_\beta\sigma H\right)$$

$$-f\left(\frac{\hbar^2 p_z^2}{2m_e}+(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c-g\mu_\beta\sigma H\right)$$

$$=\hbar\omega_c f'\left(\frac{\hbar^2 p_z^2}{2m_e}\right) \tag{44}$$

この式を用いると(43)式の右辺の分母の ω_c はキャンセルして消える。更に $U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n & ,0 \\ n+m & ,0\end{pmatrix}$ はラゲールの多項式 $L^m_{n+m}(x)$ を用いて次の様に表わされ

$$U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n+m, & 0 \\ n & ,0\end{pmatrix}=U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n & ,0 \\ n+m & ,0\end{pmatrix}=(i)^m\left(\frac{\bar{\ell}^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}}e^{-(\bar{\ell})^2/4}$$

$$\times\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{\{(n+m)!\}^3}}\;L^m_{m+n}\left(\frac{\bar{\ell}^2}{2}\right) \tag{45}$$

ここで $\bar{\ell}^2=(\ell_\perp/\alpha)^2=c\hbar\ell_\perp^2/(eH)$, $n>0$, $m>0$, 磁場 $H\to 0$ のとき $\bar{\ell}^2\to\infty$ となりこのとき $U_{\ell_\perp}\begin{pmatrix} n+m & ,0 \\ n & ,0\end{pmatrix}\to 0$ となる為(43)式で与えられる $\Delta\omega$ は消える。

§4 結　　論

我々は拡張された R. P. A. により磁場中の電子気体のプラズマの分散関係に対する exchange scattering の寄与を運動方程式の方法で調べ，長波長の極限で波数 q が磁場 H に平行の場合は q の 2 次に寄与し，垂直の場合は q の 0 次に寄与することを見出した。後者の寄与は磁場が無い場合には現われなかったことである。

この原稿を読み，議論して下さった志水正男教授に感謝致します。

References

1) D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. **82** (1951) 625 ;
ibid. **85** (1952) 338 ;
ibid. **92** (1953) 609 ;
ibid. **92** (1953) 626

2) H. Kanazawa, S. Misawa and E. Fujita, Progr. theor. Phys. **23** (1960) 426.

3) P. S. Zyryanov, Soviet Phys. JETP (English Transl.) **13** (1961) 751.

4) N. D. Mermin and E. Canel, Ann. Phys. **26** (1964) 247.

5) D. M. Edwards, J. Phys. C (Solid St. Phys), **2** (1969) 84.