

## 6. レーザー状態のモデル

東北大・通研 伊 沢 義 雅

### (目 的)

レーザー光がコヒーレントになるための重要な条件となっている Macro な電場の発生<sup>\*</sup>) に対する物理的原因に関してはいまだにはっきりした解答が得られていないように思われる。このことからここでは以下に述べるような単純なモデルに基づいて多くの光子，原子系の問題を解析し，レーザー光の基本的性質，特にコヒーレンスの物理的発生原因を明らかにしようとする。<sup>1)</sup>

### (モデル)

Atom 系として 2 レベルのみもつ  $N$  個の atom をとり，photon 系として，対立する完全反射の鏡によって作られた共振器中のモードをとる。鏡に垂直な方向を  $z$  軸にとる。 $x, y$  方向に関しては開放系とする。このためモードは  $z$  方向に定在波， $x, y$  方向に進行波となる。これらのモードのうち縦モード 1 個，横モードはこの縦モードに付随する連続的なモードをとる。このような atom 系と photon 系が相互作用している場合を取扱う。次に問題となるのは実際のレーザーでは Reservoir と注目している系の中に相互作用が存在することと Pumping が加わっていることの 2 点である。ここでは上にも述べたように Macro な電場の発生原因に注目しているため Reservoir との相互作用は無視し Pumping の作用の一部は単純化された形で含めておく。<sup>\*\*)</sup> このため，

---

\*) Macro な電場の発生は Photon 系及び Atom 系の種々の相関関数のふるまいに決定的な影響を与え Macro な電場が大きくなるにつれてそれらの関数が factorize される傾向をもつ，即ち R. J. Glauber の言う意味で “coherent になる” ことがわかる。このことからここでは Macro な電場の発生することを coherence の発生することと同じ意味に解釈することにする。

\*\*\*) 著者は Reservoir との相互作用はレーザーの Macro な電場の発生には本質的でないと考えている。一方，Pumping は以下で述べる  $n_0$  を外部から与えられたある値に保っておくのに必要であるため Macro な電場の発生には重要な役割を果していると考えている。

$$n = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \sum_i \frac{\sigma_{zi}}{2}$$

$$= (\text{photon number}) + (\text{population difference})/2$$

というハミルトニアン const of motion の期待値  $n_0$  を外部パラメタとして与えることにより Pumping の作用の一部をとり入れる。従って以下での解析は与えられた  $n_0$  に対して系の安定な状態はいかなるものであるかを調べることである。

( 解析の概略 )

ハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H = \sum_{\mathbf{k}\perp} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \sum_i \frac{\hbar}{2} \omega_{0i} \sigma_{zi} + \sum_{i, \mathbf{k}\perp} (g_{ki} a_{\mathbf{k}}^+ \sigma_i^- + g_{ki}^* a_{\mathbf{k}} \sigma_i^+) \quad (1)$$

ここで  $a_{\mathbf{k}}$ ,  $a_{\mathbf{k}}^+$  はエネルギーが  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ , 波数ベクトルが  $\mathbf{k}$  の photon annihilation operator, creation operator.  $\sigma_i^{\pm}$ ,  $\sigma_{zi}$  は  $i$  番目の atom の Pauli spin operator でそのエネルギーは  $\hbar\omega_{0i}$  である。  $g_{ki}$  は photon 系と Atom 系の相互作用定数である。  $n$  の期待値  $n_0$  を外部パラメタとして与える問題設定は Lagrange multiplier  $\lambda$  の導入により

$$H^{(\lambda)} = H - \lambda n \quad (2)$$

を条件なしで扱う問題と同じになることに注目する。熱平衡でかつ stationary state にあると仮定する。ここでは解析の基本的な方針をみるため  $T=0$  の場合のみを示し、  $T \neq 0$  の場合は結果のみを記す。

photon 系に対して次の displacement 変換を施す。

$$a_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}} \quad (\beta_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0} \beta_{\mathbf{k}_0}, \mathbf{k}_0 = (0, 0, k_0)) \quad (3)$$

$$\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_T = 0, \quad \beta_{\mathbf{k}} : \text{c-number} \quad (4)$$

(  $\langle \dots \rangle_T$  は Thermal average )

Atom 系に対しては、 spin 空間内における回轉變換

$$\sigma_{zi} = (|u_i|^2 - |v_i|^2) \sigma'_{zi} + 2 u_i v_i \sigma_i^{+'} + 2 u_i^* v_i^* \sigma_i^{-'} \quad (5)$$

$$\sigma_i^- = u_i^{*2} \sigma_i^{-'} - v_i^2 \sigma_i^{+'} - u_i^* v_i \sigma'_{zi} \quad (6)$$

を行なう。但し

$$|u_i|^2 + |v_i|^2 = 1$$

$\sigma_i^{\pm}, \sigma'_{zi}$  : Pauli spin operator

unitary 変換 (3), (5), (6) の物理的な意味は atom 系及び Photon 系の classical な状態を系の unperturbed ground state にとり直しそこから Excitation として Quantum な効果を見るためのものである。変換後の unperturbed ground state は次式で与えられる。

$$|\Psi_{k_0}\rangle = |\beta_{k_0}\rangle \prod_{k \neq k_0} |\beta_{k=0}\rangle \prod_{i=1}^N e^{i\xi_i} (\cos \varphi_i - e^{i\phi_i} \sin \varphi_i \sigma_i^+) |vac\rangle \quad (7)$$

$|\beta_k\rangle$  : Coherent State

$$u_i = e^{i\xi_i} \cos \varphi_i, \quad v_i = e^{i(\phi_i + \xi_i)} \sin \varphi_i$$

$|vac\rangle$  : atom 系が全て lower state にある状態

$\beta_{k_0}$  は位相のそろった (あるいは位相の定義できる) Macro な電場とみなすことができる。この  $\beta_{k_0}$  をレーザー光のコヒーレンスの発生原因と考えている。 $\beta_{k_0}$  の存在は atom 系のコヒーレンスの存在を示す電気分極の非対角成分  $u_i^* v_i$  を作り出す。この逆も又成立する。このため、 $\beta_{k_0}$  と  $u_i^* v_i$  は self consistent な関係式 ( unperturbed ground state (7) が安定であるための条件式 ) によって決定される。この条件によってもまだ残っている相互作用を近似的に対角化するため、とり直した unperturbed ground state からの excitation の量が少ないという仮定をつけることにより、スピノペレータを boson でおきかえ、さらに問題を簡単にするため  $k_0 \ell \ll 1$  (\*\*\*) ( $\ell$ : atom 系の存在する z 方向の長さ) の条件をつける。これによって通常、磁性理論で用いられる spin wave 近似に相当する近似が可能となり、ハミルトニアンを相互作用に関して Bilinear term のみとって対角化すると

$$H^{(\lambda)} = \sum_{\mathbf{k}_\perp} (\Omega_+(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k},+}^+ + \Omega_-(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k},-}^+) \quad (8)$$

ここで  $\alpha_{\mathbf{k},\pm}$  は boson operator

これらの結果を有限温度の場合に拡張すると次のようになる。  $n_0$  の値にはある critical value (レーザーの慣用語に従えば Threshold value)  $n_c(T)$  が存在し、この値をさかいにして系のふるまいには本質的な差異が生じる。具体的に系を特徴づける種々の量の  $n_c(T)$  をさかいにしたふるまいの相違をみると次のようになる。

(a) Positive frequency part of macroscopic electric field :  $\beta_{\mathbf{k}}$

$$n_0 \leq n_c(T) \quad \beta_{\mathbf{k}} \equiv 0 \quad (9)$$

$$n_0 > n_c(T) \quad \beta_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} \beta_{\mathbf{k}_0} \quad (\beta_{\mathbf{k}_0} \neq 0)$$

$\beta_{\mathbf{k}_0}$  の決定方程式は次式により与えられる

$$\tilde{\omega} \bar{\omega}_{\mathbf{k}_0} = N |g_{\mathbf{k}_0}^\ell|^2 \tanh(\tilde{\omega}/2T) \quad (10)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 + 4 |g_{\mathbf{k}_0}^\ell|^2 \beta_{\mathbf{k}_0}^2}$$

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 - \lambda, \quad \bar{\omega}_{\mathbf{k}_0} = \omega_{\mathbf{k}_0} - \lambda$$

(b) Elementary excitation spectrum :  $\Omega_{\pm}(\mathbf{k})$

$$n_0 \leq n_c(T)$$

$$\Omega_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [\bar{\omega}_{\mathbf{k}} + \bar{\omega}_0 \pm \sqrt{(\bar{\omega}_{\mathbf{k}} - \bar{\omega}_0)^2 + 4N |g_{\mathbf{k}}^\ell|^2 \tanh(\bar{\omega}_0/2T)}] \quad (11)$$

$$n_0 > n_c(T)$$

$$\Omega_{\pm}^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [\tilde{\omega}^2 + \bar{\omega}_{\mathbf{k}}^2 + 2(\bar{\omega}_0 N |g_{\mathbf{k}}^\ell|^2 / \tilde{\omega}) \tanh(\tilde{\omega}/2T)]$$

\*\*\*) この仮定は unitary 変換によってハミルトニアンを対角化するためには必要だが、Green 関数の方法を用いれば  $\mathbf{k}_0 \ell \gg 1$  の場合でも同様の解析が可能であり、結果の本質的な部分はかわらない。

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{\{\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}_k^2 + 2(\bar{\omega}_0 N |g_k^\ell|^2 / \bar{\omega}) \tanh(\bar{\omega}/2T)\}^2} \\ & - 4\{\bar{\omega}_k - (N |g_k^\ell|^2 / \bar{\omega}) \tanh(\bar{\omega}/2T)\} \\ & \times \{\bar{\omega}^2 \bar{\omega}_k - (\bar{\omega}_0^2 N |g_k^\ell|^2 / \bar{\omega}) \tanh(\bar{\omega}/2T)\} \end{aligned} \quad (12)$$

$\Omega_-(k) \rightarrow 0$  ( $k_\perp \rightarrow 0$ ), 即ち  $\Omega_-(k)$  は Threshold 以上では Zero mode である。

この他電気分極の非対角成分, Anomalous correlation function :

$\langle b_k^+ b_k^+ \rangle_T$  なども  $n_c(T)$  をさかいにしてふるまいが異なる。

ここで  $n_c(T)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} n_c(T) = \sum_{k_\perp} \frac{1}{\Omega_+^0(k) - \Omega_-^0(k)} & \left[ (\bar{\omega}_0 - \Omega_-^0(k)) \times \frac{1}{e^{\Omega_-^0(k)/T} - 1} \right. \\ & \left. + (\Omega_+^0(k) - \bar{\omega}_0) \times \frac{1}{e^{\Omega_-^0(k)/T} - 1} \right] - \frac{N}{2} \tanh(\bar{\omega}_0/2T) \end{aligned} \quad (13)$$

但し,  $\Omega_\pm^0(k)$  は (11) 式の中に入っている  $\lambda$  として

$$\bar{\omega}_0 \bar{\omega}_{k_0} = N |g_{k_0}^\ell|^2 \tanh(\bar{\omega}_0/2T)$$

から求まる値を代入したものである。

( 結 論 )

$n_0$  にはある critical value  $n_c(T)$  が存在し

$n_0 > n_c(T)$  Macro な電場が存在する。

$n_0 \leq n_c(T)$  Macro な電場が存在しない。

となり, この Macro な電場の発生原因が photon 系と Atom 系の相互作用している系におけるある種の Bose Condensation によるものであるということである。これによってインコヒーレントな光がコヒーレントな光になる時に顕著にみられる Frequency Narrowing, Beam Narrowing 等の現象を説明する一つ

の手がかりが得られた。

以上のことからレーザー光がコヒーレントになるためには Bose Condensation のおこることが重要な役割を果しているのではないかと考えられる。

(文 献)

- 1) Y. Isawa ; J. Phys. Soc. Japan 29 (1970) 1101

7. 負性抵抗発振の臨界点近傍における異常ゆらぎ

東工大・理 川久保 達之

最近レーザや負性抵抗発振の現象を固体における相転移の問題と関連させて議論することが行われている。この観点からレーザや負性抵抗体のような能動系におけるゆらぎの問題を考えてみるに、丁度強磁性体や強誘電体のキュリー点近傍における臨界点ゆらぎと同じように、発振の場合でもその臨界点近傍での系の不安定性に伴って、輻射あるいは電流のゆらぎが増大し、やがてそれがコヒーレントな発振へと集束していくものと考えることができよう。このような予想のもとに簡単な雛型としてトンネルダイオードを選び、

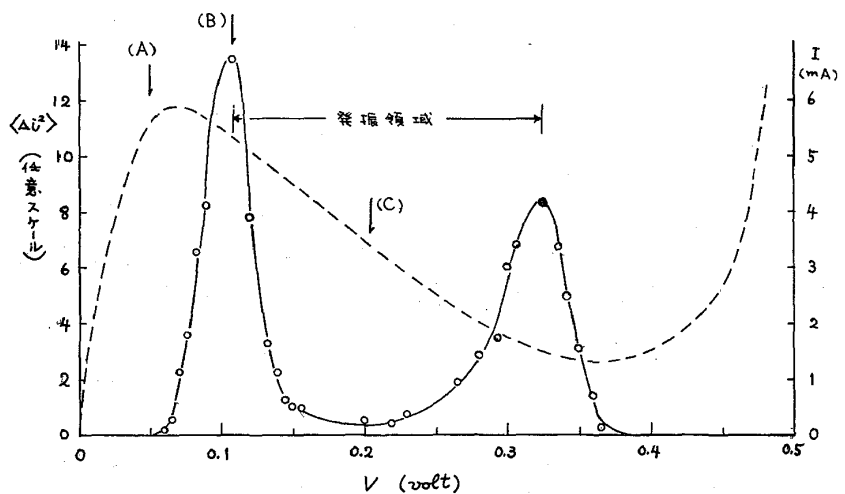


図1. トンネルダイオードのV-I特性および電流ゆらぎ