2. Coherent States と場の理論，その Electron Phonon 相互作用への応用

北大工　　北 村 正 直

§1. はじめに

Coherent State は特にそう名づけられてはいなかったが場の理論には古くからあらわれてきている。この論文では調和振動子の最小不確定を持つ状態としての Coherent State を紹介し，（§2），次いで Static Source と相互作用している Bose 粒子場の基底状態としての Coherent State を論ずる。（§3）更に source が一様に動いている場合の粒子の放出の可能性をしらべ，そこで得られた結果を，Electron と相互作用している phonon 場に応用する。（§4），その結果，圧電性半導体に電場を加へたとき，電子密度の波が生ずれば，電子の drift velocity が，音波の速度を越えるとき，phonon が大量に放出される，又放出された phonon は chorent な状態にあることが示される。

§2. 調和振動子の Coherent State

一定な外力 F のもとにある調和振動子は Hamiltonian

$$H = H_0 + H' \tag{2・1}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \tag{2・2}$$

$$H' = -Fq \tag{2・3}$$

で記述される。古典論では二つの Hamiltonian H と H_0 とは全く同じ様な振動子を記述し，外力の影響は単に振動の中心点をずらせるだけであることが知られている。量子論でもこの事情は変らない。即ち，正準変換

$$\begin{aligned} p &\rightarrow P = p \\ q &\rightarrow Q = q - \xi, \quad \xi = F/\omega^2 \end{aligned} \tag{2・4}$$

により，Hamiltonian (2・1) は

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2) - \frac{1}{2}\omega^2 \xi^2 \tag{2・5}$$

となる。*) (2・5) のHの基底状態は，外力のない場合のH_0の基底状態からξだけ変位した状態である。H_0の基底状態の波動函数$\psi_0(q')$は，

$$\psi_0(q') = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\omega\, q'^2\right] \tag{2・6}$$

で与えられる。同様にHの基底状態は$\psi_\xi(q')$は

$$\begin{aligned}\psi_\xi(q') &= \psi_0(Q') \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\omega(q'-\xi)^2\right]\end{aligned} \tag{2・7}$$

で与えられる。これは$\psi_0(q')$をξだけずらした波動函数である。$\psi_0(q')$は無限回微分可能であるから，$\psi_\xi(q')$は又，

$$\psi_\xi(q') = \exp\left[-\xi\frac{d}{dq'}\right]\psi_0(q') \tag{2・8}$$

と書くことが出来る。ここでDirac の bra，ket 記号を用いて[4]

$$\begin{aligned}\psi_0(q') &= \langle q'|0\rangle \\ \psi_\xi(q') &= \langle q'|\xi\rangle\end{aligned} \tag{2・9}$$

と書くと，(2・8) に対応する式は

$$\begin{aligned}\langle q'|\xi\rangle &= \exp\left[-\xi\frac{d}{dq'}\right]\langle q'|0\rangle \\ &= \langle q'|e^{-\xi\frac{d}{dq}}|0\rangle \\ &= \langle q'|e^{-i\xi p}|0\rangle\end{aligned} \tag{2・10}$$

となる。但し $|0\rangle$と $|\xi\rangle$とは夫々H_0と H の基底状態で，

---

*) この論文を通して$\hbar = 1$の単位を採用する。

$$p = \frac{1}{i}\frac{d}{dq}$$

は運動量演算子である。即ち，二つの基底状態の間には

$$|\xi> = e^{-i\xi p}|0> \qquad (2\cdot11)$$

なる関係がある。ここで量子の消滅，生成演算子 a，a^* を導入しよう。q と p とは a，a^* で

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a+a^*) \\ p &= (-i\omega)\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a-a^*) \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot12)$$

と表わされる。これを用いると（2・11）より

$$|\xi> = \exp\left[\frac{\xi}{\sqrt{2\omega}}(a^*-a)\right]|0>$$

$$= e^{-\frac{\xi^2}{4\omega}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2\omega}}a^*}|0> \qquad (2\cdot13)$$

を得る。$\xi/\sqrt{2\omega}=\alpha$ とおけば，$|\xi>$ は Glauber が定義したCoherent state $|\alpha>$ に他ならない。[5] 状態 $|\xi>$ はHの基底状態であるから，H_0 の基底状態 $|0>$ と同様に不確定性が最小，即ち

$$\Delta q' \cdot \Delta p' = \frac{1}{2} \qquad (2\cdot14)$$

の状態であることは容易に示される。又，状態 $|\xi>$ に於て，粒子数は，Poisson 分布をしていることも容易に確められる。即ち

$$|<n|\xi>|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^2}{n!} \qquad (2\cdot15)$$

ここに

$$\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{2\omega}}$$

更に

$$[a, f(a^*)] \equiv \frac{\partial}{\partial a^*} f(a^*) \tag{2·16}$$

と

$$a|0> = 0 \tag{2·17}$$

を用いて(2·13)より

$$a|\xi> = \frac{\xi}{\sqrt{2\omega}}|\xi> = \alpha|\xi> \tag{2·18}$$

が得られる。

さて外力Fが $t=0$ で突然取除かれたと考えよう。すると $t>0$ では

$$H = H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

となる。このとき状態 $|\xi>$ での q と p との期待値は

$$\begin{aligned} <q> &= <\xi|q(t)|\xi> = \xi \cos \omega t \\ <p> &= <\xi|p(t)|\xi> = -\xi\omega \sin \omega t \end{aligned} \tag{2·19}$$

となり，しかも不確定性が最小であることは保存されることが容易に確められる。[3)]

斯くの如く，Coherent State は不確定性が最小の状態であり，最も古典的な状態に近い量子状態であることがわかる。更に以上の考察は我々に次の様な物理的解釈をすることを許すであろう。即ち，外力の下での基底状態 $|\xi>$ には H_0 の運動をあらわす a 一量子が沢山存在するがそれらは仮想粒子であって取り出すことは出来ない。併し外力が取除かれると，実在粒子としてドツと出て来る。しかもこの多くの粒子がひと塊りとなって Coherent に運動する。それは仮想粒子状態にあったとき粒子群はすでに Cohhrent であったからである。

§3. 中性 Bose 粒子場と Static Source との相互作用

中性 Bose 粒子が Static Source と相互作用しているとき，相互作用は Static Source に粒子の着物をきせるだけで，実在粒子の散乱はひきおこさない。この系の Hamiltonian は

$$H=\int_V \frac{1}{2}\left[\pi^2(\vec{r},t)+c^2|\nabla\phi(\vec{r},t)|^2+c^2\mu^2\phi^2(\vec{r},t)\right]d^3r$$
$$-\int_V \phi(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t)\,d^3r \qquad (3\cdot1)$$

で与えられる。ここに $\phi(\vec{r},t)$ は Bose 粒子場，$\pi(\vec{r},t)$ は ϕ に共役な場である。$\rho(\vec{r},t)$ は source 函数で， static source の場合には時間によらない。これを粒子の生成，消滅演算子を用いて書きあらわすと，

$$H=\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\,a_{\mathbf{k}}^{*}\,a_{\mathbf{k}}-\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\rho^{*}(\vec{\mathbf{k}})\,a_{\mathbf{k}}+\rho(\mathbf{k})\,a_{\mathbf{k}}^{*}\right) \qquad (3\cdot2)$$

但し，

$$\rho(\mathbf{k})=\int\rho(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3r,\quad \rho^{*}(\mathbf{k})=\rho(-\mathbf{k}) \qquad (3\cdot3)$$

である。(3・2) は (2・1) の Hamiltonian と同じ形の項の和である。従って (2・4) に相当する変換

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}&\to b_{\mathbf{k}}=a_{\mathbf{k}}-\alpha_{\mathbf{k}}\\ a_{\mathbf{k}}^{*}&\to b_{\mathbf{k}}^{*}=a_{\mathbf{k}}^{*}-\alpha_{\mathbf{k}}^{*}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot4)$$

によって (3・2) は対角化される。但し

$$\alpha_{\mathrm{k}}=\frac{1}{\sqrt{2V\omega^3}}\rho(\mathbf{k}) \qquad (3\cdot5)$$

ととる。この変換は Unitary operator

$$U=\exp\left[\sum_{\mathbf{k}}\left(\alpha_{\mathbf{k}}^{*}a_{\mathbf{k}}-\alpha_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{*}\right)\right] \qquad (3\cdot6)$$

によって得られる。

$$b_{\mathbf{k}}=U^{-1}a_{\mathbf{k}}U,\qquad b_{\mathbf{k}}^{*}=U^{-1}a_{\mathbf{k}}^{*}U \qquad (3\cdot7)$$

対角化された Hamiltonian は

$$H=\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\,b_{\mathbf{k}}^{*}\,b_{\mathbf{k}}-\frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\omega^2}|\rho(\mathbf{k})|^2 \qquad (3\cdot8)$$

となる。この基底状態を $|\alpha>$ と書くと，その状態での a一粒子の平均値は

$$<n_{\mathbf{k}}> = <\alpha|a_{\mathbf{k}}^{*} a_{\mathbf{k}}|\alpha> = \alpha_{\mathbf{k}}^{*}\alpha_{\mathbf{k}} = |\alpha_{\mathbf{k}}|^{2} \qquad (3\cdot9)$$

である。併しこれらの粒子は観測されないので仮想粒子と考えよう。すなわち a粒子は仮想粒子と物理的粒子との両方を記述し，b粒子は物理的粒子のみを記述する。仮想粒子は Coherent な状態で存在している。(3・8) の第二項は，一個の source のときは source の self energy であり，二個以上の source のときは，source の self-energy と source 間の potential energy との和をあらわしている。

さてこの Static source が速度 v で一様に動いている場合を考えよう。この場合は速度 v が粒子の位相速度を越えない限り，物理的粒子を放出しないことが示される。これは自由電子が光子を放出，吸収し得ないことに相当している。併し，物質中では，source の速度が物質中での光速度を越えることがあり，そのとき Source は光子を放出する。[7] 即ち Cerenkov radiation がおこる。これは Source の速度が着物である仮想光子の速度を越え，仮想光子が振落されて物理的光子としてあらわれる現象と考えてよいであろう。若しこの様な考えが実情に近いならば以下のような結果がえられる。

i) Cerenkov radiation は Coherent light である。

ii) 一様な beam を用いると $\mathbf{k} \neq 0$ のとき $\rho(\mathbf{k})$ は消える。従って仮想光子は少なくなり（少くとも脱落しやすい光子）Cerenkov radiation は弱くなる。断続的な beam を用いる方が効果的である。[**]（一様な beam でも弱い beam のときは断続的な beam と考えてよい。）

**) これは研究会で川久保氏がなされたコメントに基づいた推論である。

§ 4. Electron-Phonon Interaction

圧電性半導体中での電子と phonon の相互作用は次の Hamiltonian で記述されるとしよう。

$$H = \sum_{p\sigma} E_{\mathbf{p}\sigma}\, C_{\mathbf{p},\sigma}^{*}\, C_{\mathbf{p},\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}\, a_{\mathbf{k}}^{*}\, a_{\mathbf{k}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k} M_{\mathbf{k}}\,(a_{\mathbf{k}}+a^{*}_{-\mathbf{k}})\sum_{\mathbf{p}\sigma} C^{*}_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma}\,C_{\mathbf{p},\sigma} \tag{4・1}$$

ここに$C^{*}_{\mathbf{p}\sigma}$，$C_{\mathbf{p}\sigma}$は運動量P，スピンσの電子の生成，消滅演算子であり，$E_{\mathbf{p}\sigma}$はそのenergyである。圧電性半導体の電圧ー電流非線型現象は前節のような考え方で定性的に理解出来る。波長が電子の平均間隔よりはるかに大きいときは電子とphonon waveとの相互作用は

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}}\,(a_{\mathbf{k}}+a^{*}_{-\mathbf{k}})\left\langle\sum_{\mathbf{p}\sigma} C^{*}_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma}\,C_{\mathbf{p},\sigma}\right\rangle \tag{4・2}$$

でおきかえてよいであろう。ここに

$$\left\langle\sum_{\mathbf{p}\sigma} C_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma}\,C_{\mathbf{p}\sigma}\right\rangle=\rho(\mathbf{k}) \tag{4・3}$$

は電子の密度のFourier成分である。従ってこの様な電子の密度波が存在するときは，電子系はphonon の着物を着ている。この系に電場がかけられこの密度波が一様の速度vで電場にそって動きはじめたとき，vが音速cより小さいときはphonon は発生しないが，vがcより大きくなると電子系はphonon を発生し，外場より与えられるエネルギーの一部を失う。このとき，外場より得るエネルギーと，phonon 場に与えられるエネルギーとが等しくなる様な速度が電子系のdrift 速度vであるといえる。

さて(4・3)の様な電子の密度波がどのようにして生ずるかは，我々の方法のワクの中ではまだ解かれていない問題である。従って我々は若し電子の密度波があれば云々という話をしているのである。かかる密度波の流れより発生するphonon は coherent な波でなければならない。これは仮想phononの着物が振落されて出て来るphonon であり仮想状態ではcoherent な状態にあったからである。

参考文献

1) 朝永振一郎他，“量子力学に於ける数学的方法”第5章，岩波書店，東京 1958

2) S.S.Schweber, “Relativistic Quantum Fiele Theory” 12a, Row, Peterson & Co., Evanston, Ill., 1961

3） E.M.Henley & W.Thirring, "Elementary Quantum Field Theory", Chapter 2, McGraw-Hill, Hew York, 1962
4） P.M.A.Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", 3rd ed., Chapter V, Oxford University Press, London, 1947
5） R.J.Glauber, "Quantum Theory of Coherence" in "Quantum Optics" editted by S.M.Kay & A.Maitland, Academic Press, London, 1970
6） G.Wentzel, "Quantum Theory of Fields", §7, (Translated by J.M.Jauch), Interscience Publishers, Inc., New York, 1949
7） A.Sommerfeld, "Optics" §47, (Translated by O.Laporte & P.A.Moldauer), Academic Press, New York, 1964

3． 超流動と Coherent State

名大理　碓井恒丸

簡単な review を行い， comment を少々加える。

1．理想気体

symmetry breaking term $-(Ua_0^+ + U^* a_0)$ を加えたとき "grand Hamiltonian" $\mathcal{H}$ の最低状態は，（$\alpha \equiv -U/\mu$，μ は化学ポテンシャルとして），coherent state $|\alpha\rangle = \exp[\alpha a_0^+ - \alpha^* a_0]|0\rangle$ で与えられる。したがって $\mu \sim V^{-\frac{1}{2}}$。有限温度でも grand canonical ensemble をしらべると，T_c 以下で quasi-average（$\mu \to 0$ then $U \to 0$）をとれば $\langle a_0 \rangle/\sqrt{V} = -U/\mu\sqrt{V}$ 有限となる（broken symmetry！）。しかも $\langle a_0^+ a_0 \rangle = \langle a_0^+ \rangle \langle a_0 \rangle$ が成立するから，a_0 に関してはやはり coherent state になっている（文献1）。そこで更に symmetry breaking term $-\Sigma(Ua_k^+ + U^* a_k)$ を考え，同様な極限を考えると $V \to \infty$ のとき $\varepsilon_k(\sim V^{-\frac{2}{3}}) < \mu(\sim V^{-\frac{1}{2}})$ を満足するすべての k 状態が