1．統計光学におけるコヒーレント表示について

名古屋大学，教養部　加野　泰

§1．コヒーレント状態および位相混合状態のエントロピー

ボーズ粒子の生成，消滅演算子 a^+，a は交換関係

$$[a, a^+] = 1 \tag{1}$$

をみたす。これらの演算子により，個数演算子を $N_{op} \equiv a^+a$ と定義すれば，N_{op} の固有状態として，$|n\rangle$ が存在し，それらは，

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle \tag{2}$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \tag{3}$$

をみたす。演算子 a および a^+ の行列要素は，$|m\rangle$ による表示，つまり，個数表示（occupation number representation）を用いれば，

$$\langle m|a|n\rangle = \sqrt{n}\ \delta_{m,n-1} \tag{4}$$

$$\langle m|a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\ \delta_{m,n+1} \tag{5}$$

と書くことができる。これらの状態 $|n\rangle$ の一次結合により，a，a^+ の固有状態をつくることができる。すなわち，コヒーレント状態とよばれる状態，[1, 2]

$$|z\gg = |re^{i\theta}\gg = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}|n\rangle \tag{6a}$$

および

$$\ll z| = \ll re^{i\theta}| = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}\langle n| \tag{6b}$$

は，

$$a|z\gg = z|z\gg, \quad \ll z|a^+ = z^*\ll z| \tag{7}$$
$$\ll z|z\gg = 1$$

という関係式を満足している。ただし，z は任意の複素数である。状態 $|z\gg$ は，恒等式

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta\,|re^{i\theta}\gg\ll re^{i\theta}|$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d^2z\,|z\gg\ll z| \tag{8}$$

をみたしているので，完備系をなしていると考えられるが，zはすべての複素数を取ることができるので，過剰完備系（overcomplete set）をなす。また，$z \neq z'$とすれば

$$\ll z|z'\gg = \exp\left\{-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)+|zz'|e^{i(\theta'-\theta)}\right\} \tag{9}$$

となるので直交してはいない。

密度演算子，

$$\rho_z \equiv |z\gg\ll z| \tag{10}$$

は，コヒーレント状態という一つの純粋状態をあらわす密度演算子と考えられる。n個の粒子を見いだす確率は，個数表示によるρ_zのn番目の対角要素，

$$<n|\rho_z|n> = \exp(-|z|^2)\frac{|z|^{2n}}{n!} > 0 \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{11}$$

で与えられ，これはポアッソン分布である。ρ_zのエントロピーは，もちろんゼロである。

$$S = -k\,\mathrm{tr}\,[\rho_z \log \rho_z] = 0, \quad (k：ボルツマン定数) \tag{12}$$

次に，aの位相に不定さがある状態を考える。簡単のために，二つの位相角θ_1, θ_2のいずれかを取る状態を考えると，この状態をあらわす密度演算子は，

$$\rho^{(1,2)} = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\frac{1}{2}\{\delta(\theta-\theta_1)+\delta(\theta-\theta_2)\}\,|z\gg\ll z| \quad (\theta_1 \neq \theta_2)$$

$$= \frac{1}{2}|z_1\gg\ll z_1| + \frac{1}{2}|z_2\gg\ll z_2| \tag{13}$$

ただし，

$$z_1 = r\,e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r\,e^{i\theta_2}$$

である。この状態のエントロピーは，$\rho^{(1,2)}$の固有値を

$$r^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(1 \pm | \langle\!\langle z_1 | z_2 \rangle\!\rangle | \right) \tag{14}$$

とすれば，

$$S = -k\{ r^{(+)} \log r^{(+)} + r^{(-)} \log r^{(-)} \} > 0 \tag{15}$$

となって，当然のことながら純粋状態 ρ_z よりも大きくなる。しかし，（15）のSの大きさは，位相角 θ_1, θ_2 の値により非常に異なっている。

$\theta_1 \gtrsim \theta_2$ であれば，sは小さいが，$\theta_2 \gtrsim \theta_1 + \pi$ では大きくなる。すなわちSの大きさは，位相角の分布によって異なる。これから，さらに一般に，消滅演算子aの位相がn個混っている状態のエントロピーは，$\theta_1 \gtrsim \theta_2 \gtrsim \theta_3 \gtrsim \cdots \gtrsim \theta_n$ であれば，Sは小さく，n個の位相角が，一様に分布していれば，Sは

$$S \gtrsim k \log n \tag{16}$$

となることがわかるであろう。

さらに，位相角が，ランダムに分布する状態の密度演算子は，

$$\rho_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \ | z \rangle\!\rangle \langle\!\langle z | \tag{17}$$

で与えられるので，これを用いてエントロピーを計算すれば，

$$S = -k|z|^2 (\log |z|^2 - 1) + k \exp(-|z|^2) \times \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\exp(|z|^2 e^{-t}) - 1}{1 - e^{-t}} + |z|^2 \exp(|z|^2) \right\} \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{18}$$

となる。このオーダーを当ってみると，

$$|z|^2 \log |z|^2 < S < |z|^2 (1 + |z|^2 - \log |z|^2) \tag{19}$$

であることがわかる。（17）により，粒子の個数の平均値を求めれば，

$$\bar{n} = \mathrm{tr}\ \rho_r N_{op} = |z|^2 \tag{20}$$

となるので，Sは個数の平均値だけによることがわかる。

§2. 真空中の電磁場に関する密度演算子

これまでは，$|z|$ が一定という状態をあらわす密度演算子だけを論じて来たが，以下では，θ だけでなく $|z|$ も変化する場合を考える。単一モードの真空中の電磁場の状態をあらわす密度演算子は，コヒーレント状態の過剰完備性を用いて，“対角型”演算子としてあらわされる。[1,2)]

$$\rho = \int d^2 z\, \phi(z)\, |z\gg \ll z| \tag{21}$$

ただし，

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\rho(n,n')(n!\,n'!)^{\frac{1}{2}}}{(n+n')!\,2\pi r} \exp\left(r^2 + i(n'-n)\theta\right) \times \left\{\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n+n'} \delta(r)\right\} \tag{22}$$

対角型密度演算子（21）の重要な性質は，ノーマル・オーダーに並べられた生成消滅演算子からなる任意の演算子の統計的平均を計算する場合，a は z に，a^+ は z^* に置きかえて計算できることである。たとえば，

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\rho (a^+)^n a^m\right) &= \mathrm{tr}\left[\int d^2 z\, \phi(z) |z\gg\ll z| (a^+)^n a^m\right] \\ &= \int d^2 z\, \phi(z) (z^*)^n\, z^m \end{aligned} \tag{23}$$

以上の議論は，多重モードの電磁場の場合にも容易に一般化できる。

密度演算子（21），（22）を用いて，たとえば，真空中の電磁場の相関関数を計算する場合，電磁場の演算子が c 一数に置きかえられるので，相関関数は，見かけ上古典論によるものと一致する。このことから，E.C.G.Sudarshan は，コヒーレンスの理論における量子力学的記述と，古典論的記述の同等性を主張しているが，[2)] このような同等性は，一般には成立しない。（22）の $\phi(z)$ は，$\delta(r)$ を含むので，$|z|=0$ だけを取ることになり，$\phi(z)$ は古典的な z の分布関数とは考えられない。また，n，n′ についての和があるので，光子の概念を離れて計算を行うことはできない。

しかし，ある種の統計的状態にある電磁場に対しては，その古典的および量子力学的記述が全く同等であると考えられる。以下に，このような同等性が成

り立つ例を示す。電磁場の統計的状態をあらわす密度演算子が個数表示において対角化される場合を考える。

$$\rho_D = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n,n) \; |n\rangle\langle n| \tag{24}$$

ここで，さらに，対角要素 $\rho(n,n)$ が

$$\rho(n,n) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^n g(\lambda)\, d\lambda \qquad (0<\lambda_1<\lambda_2<1) \tag{25}$$

とあらわされると仮定する。ここで，$g(\lambda)$ は正値の関数とする。このような演算子 ρ_D は，コヒーレント状態を用いて，対角型にあらわすことができる。

$$\left.\begin{aligned} \rho_D &= \int d^2z\, \phi_D(z) \; |z\rangle\rangle\langle\langle z| \\ \phi_D(z) &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, \frac{g(\lambda)}{\pi} \exp\left\{|z|^2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

(26) における $\phi_D(z)$ は，非負の関数であり，また，(22) と異なって光子の数についての和を含まない。したがって，光子という概念を全く無視して，古典的な z の分布関数と考えることもできる。他方，$\phi_D(z)$ は z の位相にはよらず，$|z|^2$ だけを含んでいる。(20) により $|z|^2$ は光子の平均個数の分布を与えているとも考えられる。すなわち，ρ_D であらわされる電磁場の状態においては，たとえば，相関関数等を計算する場合，古典論的記述と，量子論的記述は完全に同等である。このような状態にある電磁場の具体的な例として，空洞輻射 (Blackbody Radiation) がある。[2, 3]

参考文献

1. R.J.Glauber, Phys. Rev. 130 (1963) 2529
2. E.C.G.Sudarshan, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 277
3. Y.Kano, J.Phys. Soc. Japan, 19 (1964) 1555