非対称実マトリックスの固有値と固有モードの局在性

早大理工　　斉　藤　信　彦

格子振動にあらわれるマトリックスは、常に対称マトリックスであって、成分は実である。その固有値は実(負)であって、それが固有振動数の2乗を与える。不規則格子においてはその固有振動数の2乗振動数分布関数は谷とピークの特徴のあるスペクトルを示し、固有関数は局在化していることがわかっている。一次元鎖で質量のみがちがう不規則系の伝達行列は、質量を mi とし、バネ定数を k とすると

$$T = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{m_i}{k}\omega^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で　$\det T = 1$　である。一方神経回路にあらわれる微分方程式は i 番目のニューロンの電位を x_i とすると、隣り同士のみの結合では

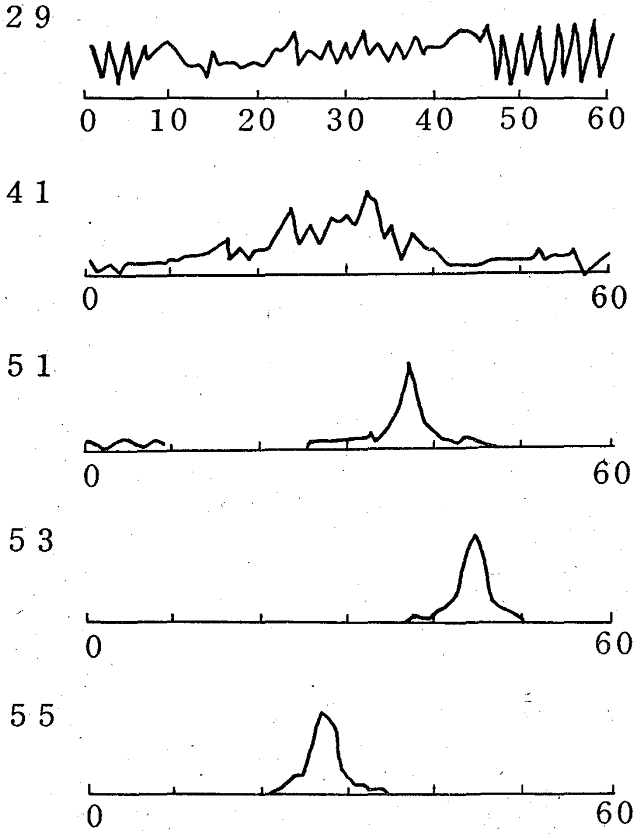
$$\dot{x}_i = -\frac{1}{\tau_i} x_i + a_{i,\ i-1}\ x_{i-1} + a_{i,\ i+1}\ x_{i+1}$$

とかゝれる。$a_{i,\ j}$ はランダムな値をとり、$a_{ij} = a_{ji}$ の関係は一般には成立しない。それ故このマトリックスは非対称であり、一般に固有値は複素数 $\lambda_j = \mu_j + i\omega_j$ となる。この複素部分 ω_j が神経等の振動をあらわす。伝達行列の形でかくと、

$$T' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{i,\ i-1}}\left(\lambda_i + \dfrac{1}{\tau_i}\right) & -\dfrac{a_{i,\ i-1}}{a_{i,\ i+1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であって　　$\det T' = \dfrac{a_{i,\ i-1}}{a_{i,\ i+1}}$

である。特別な場合として　$a_{i,\ j} = \pm 1$　のときを考えると　$\det T' = \pm 1$ である。



格子振動子系と神経回路系とは、このようにマトリックスの性格が異なるが、振動スペクトルや、局在振動の性質はよく似ている。図はその1例であって、ある興奮性と抑制性のニューロンの60個の直線的な配列に対し $\tau_i = 1$、$a_{ij} = \pm 1$ として数値計算したものである。図の左側にある数字は固有モードの番号で大きいほど振動数が高い。横軸はニューロンの番号である。高い振動数ほど局在していることがわかる。

このような局在性は、格子振動と似ているが、マトリックスの性質がちがうために、現在では、格子振動において発展せられた方法や結果をそのまゝつかうことは出来ない。これは将来の課題である。