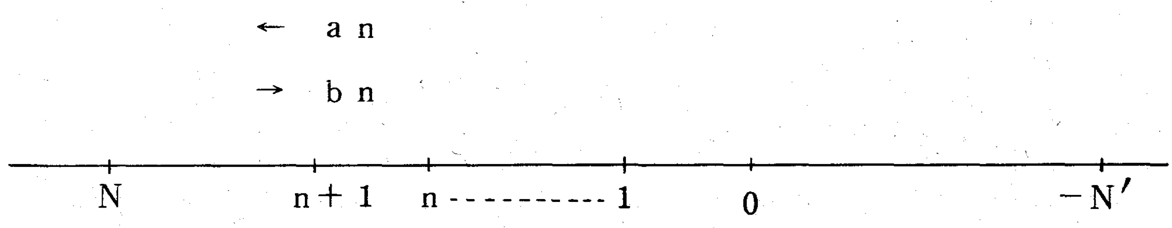
「局在解の matching 条件と固有値方程式」

芝浦工大(教養物理)　　広　田　　徹

Mott & Twose[1)]及び Mott[2)]は次の conjecture を行なった。『一次元 random 系の固有関数はすべて localizeする。しかし多次元系の固有関数は、 energyband内でmobility edgeと名付けられる値を境い目として localized regionと extended regionとに分けられる。』この conjectureは Anderson[3)]が random spin系の non-diffusion を示した1958年の論文に基くものであるが,問題についてはっきりした結論は得られていない。一次元系について Borland[4)]、Motsuda & Ishii[5)]、Hori－& Minami[6)]等により理論的にも数値解析の上からも可成りの所迄調べられているがMottの conjecture が正しいか否かという点になると明確な解答はないように思われる。そこで一次元のKronig－Penney modelを取上げ、transfer matrix の性質を使い、localized solution の条件(matchingの条件)と、periodic boundary 条件を付けた場合の固有値方程式の関係を調べてみた。matsude－Ishiiによる random matrixの積のノルムについての“exponential growth”[5)] を使用すると、この二つは系の長さが充分に長い極限に於て一致することが示される。



ポテンシャルを$V(x)=\Sigma V_n\delta(x-x_n)$とすると$x_n$と$x_{n+1}$との間の波動関数$\psi(x)$は

$$\psi(x)=a_n e^{ik(x-x_n)}+b_n e^{-ik(x-x_n)} \tag{1}$$

と書けるが、$x=x_{n+1}$に於ける結合条件より(a_n, b_n)と(a_{n+1}, b_{n+1})の間の関係式が生ずるが、繰返し演算により

$$a_N = M_{11}(N-1,0)a_0 + M_{12}(N-1,0)\cdot b_0$$
$$b_N = M_{21}(N-1,0)a_0 + M_{22}(N-1,0)\ b_0 \tag{2}$$

又は、
$$a_{-N'} = I_{11}(-1,-N')a_0 + I_{12}(-1,-N')b_0$$
$$b_{-N'} = I_{21}(-1,-N')a_0 + I_{22}(-1,-N')b_0 \tag{3}$$

が得られる。$M(N-1,\ 0)$はN個のtransfer matrixの積でunimodular性を持ったCayley matrixであることがわかる。$I(-1,-N')$は$M(-1,-N')$の逆マトリックスである。localized solutionの条件は、

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} b_N = \lim_{N'\to\infty} a_{-N'} = \lim_{N'\to\infty} b_{-N'} = 0 \tag{4}$$

でなければならないので

$$\frac{M_{11}(\infty,0)}{M_{12}(\infty,0)} = \frac{M_{21}(\infty,0)}{M_{22}(\infty,0)} = \frac{I_{11}(-1,-\infty)}{I_{12}(-1,\infty)} = \frac{I_{21}(-1,\infty)}{I_{22}(-1,\infty)} \tag{5}$$

となる。上の極限値の存在は容易に示される。上式が成立するためにはunimodular性を考慮すると(M)、(I)の各部分の大きさが無限に大きくなければならないが、Matsuda–Ishiiの“exponential growth”を使用するとこの事が示される。(M)と(I)の成分間の関係より(5)式は

$$M_{11}(\infty,-\infty) = O \tag{6}$$

となる。N, N″が非常に大きい場合には

$$M_{11}(N-1,-N') = O(I) \tag{7}$$

と書くことが出来る。一方固有値方程式の方はperiodic boundary条件($a_N = a_{-N'}$, $b_N = b_{-N'}$)をつけると

$$\mathrm{Tr}M(N-1,-N') = \mathrm{Re}M_{11}(N-1,-N') = 2 \tag{8}$$

従って、$M_{11}(N-1,-N')$の絶対値の大きさが$O(1)$であるとすると、固有値方程式(8)は局在解の条件(matchingの条件)(7)に帰着する。この事は容易に証明出来

る。即ち、もし$M_{11}(N-1, -N')$の絶対値の大きさが充分大きいとするとa_N、b_Nが$a_{N'}$、$b_{-N'}$に対しdecayしなければならないからである。(boundary条件を満たすことは不可能になる。)一般に解がdecayするとき、その幅がI/L(E)(L(E)は局在度)によって表わされることはMinami & Horiによってconjectureされており、Matsuda−Ishiiにより示されているが、この方法論により明らかにされる[7]。(7)と(8)の一致を示すのに使った性質はmatr x Mのunimodularity Cayley性及び"exponential growth"である。従って、この結論は一般の一次元系について主張出来ると思われる。即ちMott & Twoseの一次元系についてのconjectureは成立すると思われる。

文　献

1) N.F.Mott and W.D.Twose, Adv. in Phys. 10 (1961) 107

2) N.F.Mott,

3) P.W.Anderson, Phys. Rev. 109 (1958) 1492

4) R.E.Borlnd, Proc. Roy. Soc. A274 (1963) 529

5) H.Matsuda and K.Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl 45 (1970) 56

6) S.Minami and J.Hori, Prog. Theor. Phys. Suppl 45 (1970) 87

7) T.Hirota, 物性研究 16 (1971) 487

三次元無秩序系に於ける局在度 II

北大理　藤田武彦

§1 序　論

前論文[1]では三次元Anderson modelに於いて局在度L(E)をGreen関数の非対角要素の比の対数(アンサンブル)平均で定義した。他方、Thouless[2]は一次元Anderson modelに対して両端の振幅の積の幾何平均の対数で固有状態のfall−