

# 1次元不規則系の厳密な諸性質

京大・基研 石井一成

松田博嗣

これまで調べられてきた1次元不規則系の輸送現象の多くが指数関数的増大の性質に基づいて統一的に厳密に理解できることが分ってきた。

## 1. 指数関数的増大

### 強結合電子系

$$E a_n = \epsilon_n a_n + a_{n+1} + a_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

を例にとって説明する。系は  $\{\epsilon_n\}$  によって特徴づけられる。ここでは  $\epsilon_n$  互いに独立で、有限個の値の上に同じ分布をしている不規則系を考える。  $a_0, a_1$  を与えた(1)の特殊解  $a_n(E; \{\epsilon_n\})$  について

定理1・実エネルギー  $E$  を固定すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \{a_n^2(E; \{\epsilon_n\}) + a_{n+1}^2(E; \{\epsilon_n\})\} = 2r(E) > 0 \quad (2)$$

が確率1の  $\{\epsilon_n\}$  に対して成立する。

定理2・  $\{\epsilon_n\}$  を固定すると、確率1の  $\{\epsilon_n\}$  について指数関数的増大(2)が測度0の  $E$  を除いて成立する。

上の定理は(1)の特殊解

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \cdots \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} E - \epsilon_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と書けることを使って証明される。一般には  $\mathbf{T}_n$  が互いに独立で同じ分布  $\mu$  をするユニモジューラーな実行列で、 $\mu$  の台が非可換な2元を含めば任意の実ベクトル  $x$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \cdots \mathbf{T}_1 x\| = r > 0 \quad (5)$$

が確率1で成立する。実行列  $\mathbf{T}_n$  の代りに

$$Q_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n^* & a_n^* \end{pmatrix} \quad (6)$$

の型の伝達行列を考える場合には、同様な条件のもとで、

$$E = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^* \end{pmatrix} \quad (7)$$

の形の任意のベクトルに対

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 E \| = r > 0 \quad (8)$$

が確率1で成立する。

## 2、透過現象

乱れた有限の長さの散乱区間を透過する波の指数関数的減衰率 $\alpha$ は、定常解の方法で解析し、(8)の指数関数的増大の性質を利用すると、確率1で $\alpha = r > 0$  証明できる。

## 3、熱伝導

同位元素的に乱れた調和格子鎖を流れる定常エネルギー流 $J_\infty$ はCasherとLebowitzによって調べられたが、熱力学的極限をそれに沿って取るところの無限系のスペクトルが特異でなければ $J_\infty$ は温度差 $\Delta T$ に比例する。しかし不規則系では指数関数的増大の結果確率1で $J_\infty = 0$ である。

## 4、量子拡散

$$i \frac{da_n}{dt} = \epsilon_n a_n + a_{n+1} + a_{n-1}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

$$a_n(t=0) = \delta_{nN} \quad (10)$$

の初期値問題について

定理3・系が性質 $A_N$ をもてば、弱い意味で拡散不在である。すなわち

$$\int_0^\infty dt |a_N(t)|^2 = \infty \quad (11)$$

である。

ここで系が性質 $A_N$ をもつとは、ある集合 $I$ が存在

$$I) \lim_{E'' \rightarrow 0-} I_m G_{NN}(E' + iE'') = 0 \quad \text{at a. e. } E' \in T \quad (12)$$

$$\text{II) } \lim_{E'' \rightarrow 0-} \int_I dE' \operatorname{Im} G_{NN}(E' + iE'') > 0 \quad (13)$$

が成立することである。

不規則系については

定理 4・不規則系が  $A_N$  条件を満足すれば、確率 1 の  $\{\epsilon_n\}$  は性質  $A_N$  をもつ。

ここで不規則系が  $A_N$  条件を満足するとは、ある集合  $I$  が存在し

I)  $\{E\}$  を  $I$  内に固定した時測度 0 の  $E$  を除いて確率 1 の  $\{\epsilon_n\}$  に対し

$$\lim_{E'' \rightarrow 0-} \operatorname{Im} G_{NN}(E' + iE''; \{\epsilon_n\}) = 0 \quad (14)$$

II) 確率 1 の  $\{\epsilon_n\}$  に対

$$\lim_{E'' \rightarrow 0-} \int_I dE' \operatorname{Im} G_{NN}(E' + iE''; \{\epsilon_n\}) > 0 \quad (15)$$

が成立することである。

上の 2 定理は任意の次元の系

$$i \frac{da_n}{dt} = \epsilon_n a_n + \sum_m V_{n,m} a_m$$

に対しても  $\sum_n |V_{on}| < \infty$  でありさえすれば成立する。

実際に性質  $A_N$  成立している場合の有無については、(1)の系のグリーン関数は

$$G_{nm}(E) = Y_n(E) Y_m(E) \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{Y_l(E) Y_{l+1}(E)} \quad (\operatorname{Im} E = E'' \neq 0)$$

(ただし  $\{Y_n\}$  は(1)の  $Y_0=0, Y_1=1$  に対応した特殊解) に注意すると

定理 5・ $Y_l(E')$  が指数関数的増大(2)を示せば  $G_{nm}(E' - i0)$  が存在し

$$\text{I) } \operatorname{Im} G_{nm}(E' - i0) = 0$$

$$\text{II) } |G_{nm}(E' - i0)| < O(\exp\{-r(E') |n-m|\}) \quad (|n-m| \rightarrow \infty)$$

定理 5 より、(1)は  $I = (-\infty, \infty)$  として性質  $A_N$  を任意の  $N$  に対してもつことが分る。

(1)のスペクトルについては、やはり定理 5 より特異であることが分る。しかも特異でありながら非可算無限個の点をスペクトルが含んでいることも示せる。

スペクトルの性質と量子拡散の関係についても簡単な報向をしたが、これは将来の問題

であろう。

## On the Spectrum of an Isotopically Disordered Chain.

北大物理 朝 日 孝  
名大教養 柏 村 昌 平

一次元鎖（各原子の質量が確率変数）の振動において、その状態密度の異常が Dean<sup>1)</sup> によって得られてから既に 10 年の年月が経った。その後此の異常について多くの人々が研究を続けてきたが、最近松田・石井<sup>2)</sup> の両氏によって初期値問題の解の特徴としてその指数関数的増大が指摘された。我々は此の特徴が固有値問題、即ち一般的な二階定差方程式のスペクトル分解に及ぼす影響について調べ一つの結論に達した。

スペクトル分解においては初期値問題の二つの独立な基本解の比が重要である。即ち、エネルギーパラメータとして、 $\lambda \equiv \lambda' + i\lambda''$ ,

$$m_n(\lambda) \equiv - \frac{\varphi_2(n, \lambda)}{\varphi_1(n, \lambda)}, \quad \text{とくに } m(\lambda) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\lambda),$$

但し、 $\lambda'' \neq 0$  とする。

$\text{Im } m(\lambda)$  がスペクトル密度にとって重要であることは既に指摘されている<sup>3)</sup>。

$\varphi_j(n, \lambda)$  が松田・石井によるように確率 1 で指数関数的に増大する時、それが  $m(\lambda)$  に及ぼす影響は次のようである：

(1)  $\lambda'$  に応じて適当に採られた部分列  $\{m_j(\lambda')\}$  が絶対収斂する：

即ち、 $m_j(\lambda') \equiv -\varphi_2(j, \lambda') / \varphi_1(j, \lambda')$ ,  $j = n_1, n_2, \dots$  として

$$m'(\lambda') \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} m_j(\lambda'),$$

が存在している。

(2)  $\lambda$  に対しての同一部分列  $\{m_j(\lambda' + i\lambda'')\}$  は  $\lambda''$  について一様収斂する。

即ち、

$$m'(\lambda' + i\lambda'') \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} m_j(\lambda' + i\lambda'')$$