A Method of Collective Description of Elementary Excitations in Liquid He Ⅱ.

I. Phonon Excitations

東理大理　物理　　五十嵐　靖　則
鈴　木　良　治

（7月23日受理）

Abstract　我々は多粒子系に於ける量子力学的集団運動の理論を展開した。本研究では集団運動を記述する座標の他に内部運動を記述する座標を explicit に導入した。このことにより内部 Hamiltonian に含まれる新しい励起モードをこの内部座標を用いて記述することができた。この方法を液体ヘリウムⅡにおける素励起（Phonon excitation, roton excitation）の研究に応用して興味ある結果が得られた。まず最初に，phonon excitations を Tomonaga の方法を S−モードへ拡張して，記述することから始めた。phonon collective motion に対する内部運動の Hamiltonian は Bohm-Salt 等のものと同じ結果を得た。

§1. まえがき

液体ヘリウムⅡに於ける素励起スペクトルの理論的研究は多くの人達によって，色々な方法でなされてきた。Landau [1] によれば励起した粒子は単純に励起したヘリウム原子ではなく集団励起（準粒子，励起量子）であり，ヘリウム原子の多数が同時に関与する運動である。事実，k の小さな領域では $\varepsilon_p(k) = \hbar kc$ なるスペクトルを伴なった phonon excitation が起っており，k の大きな領域では，スペクトル $\varepsilon_r(k) = \Delta + \frac{\hbar^2(k-k_0)^2}{2\mu}$ を伴った roton excitation が実現していることが実験 [2] からも確かめられている。

我々は液体ヘリウムⅡに於ける素励却の構造を研究するに当って，まず初めに phonon 励起を，Tomonaga [3] によって提案された集団運動の方法を S−モードへ拡張して応用する。後で内部運動に含まれている新しい励起を取り扱う時に役立てる目的の為に，内部運動を記述する座標を explicit に導入しておいた。

§2. phonon 座標とそれに共役な運動量

phonon excitation は密度のゆらぎによる longitudinal oscillations であるから，我々は phonon 座標として density fluctuation の Fourier 成分を選ぶことにする。即ち

$$\left.\begin{aligned} \xi_p^{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \\ \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \end{aligned}\right\} \quad (|\mathbf{k}| < k_c) \tag{2・1}$$

ここで k_c は phonon の cutoff momentum である。 これに正準共役な運動量は次の様に選べる。

$$\begin{aligned} \Pi_p^{\mathbf{k}} &= -\frac{i}{k^2}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) - \frac{\hbar}{2}k^2\right\} \\ \bar{\Pi}_p^{\mathbf{k}} &= \frac{i}{k^2}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) + \frac{\hbar}{2}k^2\right\} \end{aligned} \tag{2・2}$$

(2・1), (2・2) で与えられる座標と運動量は次の交換関係を満たしている。

$$\left\{\begin{aligned} [\Pi_p^{\mathbf{k}},\ \xi_p^{\mathbf{k}'}] &= (\hbar/i)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k^2}\cdot\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\ [\bar{\Pi}_p^{\mathbf{k}},\ \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}'}] &= (\hbar/i)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k^2}\cdot\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ [\Pi_p^{\mathbf{k}},\ \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}'}] &= -(\hbar/i)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k^2}\cdot\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ [\bar{\Pi}_p^{\mathbf{k}},\ \xi_p^{\mathbf{k}'}] &= -(\hbar/i)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k^2}\cdot\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\ [\xi_p^{\mathbf{k}},\ \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}'}] &= 0 \\ [\Pi_p^{\mathbf{k}},\ \bar{\Pi}_p^{\mathbf{k}'}] &= \hbar\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')}{k^2\cdot k'^2}\circ\sum_n e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_n}(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{p}_n \end{aligned}\right. \tag{2・3}$$

ここで $[\Pi_{p}^{\mathbf{k}}, \bar{\Pi}_{p}^{\mathbf{k}'}]$ は，平均でおきかえ，Tomonaga と同じ様に，重心系を止めれば零となる。

§3. Hamiltonian の集団運動と内部運動への分離

我々はTomonaga の方法に従って，Hamiltonian を集団運動と内部運動の部分へ分離する。まず最初に kinetic energy を分離する。

系のTotal kinetic energy は次の形で与えられている。

$$T = \frac{1}{2m} \sum_{n} \mathbf{p}_{n}^{2} \tag{3・1}$$

ここで我々は，このTを二つの部分へ分離する。

$$T = T_{in} + T_{c}^{p} \quad , \tag{3・2}$$

ここで T_{in} は内部運動の kinentic energy，T_{c}^{p} は集団運動の kinetic energy である。

T_{c}^{p} は次の形に仮定する。

$$T_{c}^{p} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{1}{2 I_{p}^{\mathbf{k}}} \Pi_{p}^{\mathbf{k}} \bar{\Pi}_{p}^{\mathbf{k}} \tag{3・3}$$

ここで $I_{p}^{\mathbf{k}}$ は次の条件を満足する様に決定する。

$$T_{in} = T - \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{1}{2 I_{p}^{\mathbf{k}}} \Pi_{p}^{\mathbf{k}} \bar{\Pi}_{p}^{\mathbf{k}} \tag{3・4}$$

が $\Pi_{p}^{\mathbf{k}}$, $\bar{\Pi}_{p}^{\mathbf{k}}$ を含まないという条件，即ち

$$\begin{aligned}
&[T - \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{1}{2 I_{p}^{\mathbf{k}}} \Pi_{p}^{\mathbf{k}} \bar{\Pi}_{p}^{\mathbf{k}},\ \xi_{p}^{\mathbf{k}}] = 0 \\
&[T - \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{1}{2 I_{p}^{\mathbf{k}}} \Pi_{p}^{\mathbf{k}} \bar{\Pi}_{p}^{\mathbf{k}},\ \bar{\xi}_{p}^{\mathbf{k}}] = 0
\end{aligned} \tag{3・5}$$

容易に計算できて

$$\frac{1}{2\,I_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}}=\frac{k^2}{2\,Nm} \tag{3・6}$$

と選べばよいことがわかる。

次に potential energy を $\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}$ の Toylor 級数に展開して，$\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}$ − dependent terms とそうでない項とに分離する。 $\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}$ について二次の項までにとどめれば，

$$\begin{aligned}V=V_0&+\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}V_1^{+}+\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\bar{\xi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}V_1^{-}+\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}V_2^{++}\\&+\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\bar{\xi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}\bar{\xi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}V_2^{--}+\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\xi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}\bar{\xi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}}V_2^{+-}\end{aligned} \tag{3・7}$$

ここで，各係数は次の様に決まる。

$$\left\{\begin{aligned}V_0=V&-\frac{(i/\hbar)}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]\\&-\frac{(i/\hbar)}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}\bar{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]\\&+\frac{(i/\hbar)^2}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}^2\cdot[\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ [\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]]\\&+\frac{(i/\hbar)^2}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}^2\cdot[\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ [\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]]\\&+\frac{(i/\hbar)^2}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n'}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}}\right\}[\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},[\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]]\\V_1^{+}=&\frac{(i/\hbar)}{2}[\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ [\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]]\\&-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ [\Pi_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]]\\V_1^{-}=&\frac{(i/\hbar)}{2}[\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ [\bar{\Pi}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{k}},\ V]]\end{aligned}\right. \tag{3・8}$$

$$-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p},[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, V]]$$

$$V_2^{--}=\frac{(i/\hbar)^2}{4}[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p},[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p}, V]]$$

$$V_2^{++}=\frac{(i/\hbar)^2}{4}[\Pi^{\mathbf{k}}_{p},[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, V]]$$

$$V_2^{+-}=\frac{(i/\hbar)^2}{2}[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p},[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, V]]=\frac{(i/\hbar)^2}{2}[\Pi^{\mathbf{k}}_{p},[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p}, V]]$$

T_{in} は $\Pi^{\mathbf{k}}_{p}$ は含まないが，$\xi^{\mathbf{k}}_{p}$ を含んでいるので上と同じ方法でToylor級数に展開して分離する。

$$T_{in}=T_0+\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\xi^{\mathbf{k}}_{p}T_1^{+}+\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\bar{\xi}^{\mathbf{k}}_{p}T_1^{-}+\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\xi^{\mathbf{k}}_{p}\xi^{\mathbf{k}}_{p}T_2^{++}$$
$$+\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\bar{\xi}^{\mathbf{k}}_{p}\bar{\xi}^{\mathbf{k}}_{p}T_2^{--}+\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\xi^{\mathbf{k}}_{p}\bar{\xi}^{\mathbf{k}}_{p}T_2^{+-} \tag{3・9}$$

ここで，各係数は次の様に決まる。

$$T_0=T_{in}-\frac{(i/\hbar)}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]$$
$$-\frac{(i/\hbar)}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]$$
$$+\frac{(i/\hbar)^2}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}^2[\Pi^{\mathbf{k}}_{p},[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]]$$
$$+\frac{(i/\hbar)^2}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}^2[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p},[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]]$$
$$+\frac{(i/\hbar)^2}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq0}^{k_c}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n'}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}}\right\}[\bar{\Pi}^{\mathbf{k}}_{p},[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]]$$

$$T_1^{+}=\frac{(i/\hbar)}{2}[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\Pi^{\mathbf{k}}_{p},[\Pi^{\mathbf{k}}_{p}, T_{in}]]$$

$$-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\Pi_p^{\mathbf{k}},T_{in}]]$$

$$T_1^- = \frac{(i/\hbar)}{2}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},T_{in}] - \frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},T_{in}]]$$

$$-\frac{(i/\hbar)^2}{2}\left\{\frac{1}{N}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\Pi_p^{\mathbf{k}},T_{in}]] \tag{3・10}$$

$$T_2^{++} = \frac{(i/\hbar)^2}{2}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\Pi_p^{\mathbf{k}},T_{in}]]$$

$$T_2^{--} = \frac{(i/\hbar)^2}{2}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},T_{in}]]$$

$$T_2^{+-} = \frac{(i/\hbar)^2}{2}[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\Pi_p^{\mathbf{k}},T_{in}]] = \frac{(i/\hbar)^2}{2}[\Pi_p^{\mathbf{k}},[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},T_{in}]]$$

次に各係数の計算を実行する。系の potential energy は次の形で与えられ，

$$V = \frac{1}{2}\sum_{n \neq n'}\sum V(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}) \tag{3・11}$$

Fourier transformation が可能であると仮定すれば

$$V = \frac{1}{2}\sum_{n \neq n'}\sum\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'})} \tag{3・12}$$

と書ける。

相関を無視すれば，

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}},V] = (\hbar/i)NV_{\mathbf{k}} \cdot \sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$$

$$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},V] = (\hbar/i)NV_{\mathbf{k}} \cdot \sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$$

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}},[\Pi_p^{\mathbf{k}},V]] = -(\hbar/i)^2 NV_{\mathbf{k}} \cdot \sum_n e^{-2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \tag{3・13}$$

$$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},V]] = -(\hbar/i)^2 NV_{\mathbf{k}} \cdot \sum_n e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$$

$$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},[\Pi_p^{\mathbf{k}},V]] = (\hbar/i)^2 N^2 V_{\mathbf{k}}$$

ここで，$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, [\Pi_p^{\mathbf{k}}, V]]$，$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, [\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, V]]$ は，Tomonaga と同じ様に，平均値で置きかえれば $\frac{1}{\sqrt{N}}$ の order の誤差で零となる。従って，

$$\left\{\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{2}\sum_{n\neq n'}\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} - \frac{1}{2}\sum_{n}\sum_{n'}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c} V_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\neq n'}\sum_{|\mathbf{k}|>k_c} V_{\mathbf{k}}\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} + \frac{1}{2}N^2 V_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}=0) - \frac{N}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c} V_{\mathbf{k}}\\
V_1^{+} &= 0, \qquad V_1^{-} = 0,\\
V_2^{++} &= 0, \qquad V_2^{--} = 0,\\
V_2^{+-} &= N^2 V_{\mathbf{k}}
\end{aligned}\right. \tag{3·14}$$

同様にして，

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, T_{in}] = \frac{(\hbar/i)}{2m}\left\{2\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\mathbf{p}_n^2 - 2\hbar\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) + \frac{h^2k^2}{2}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\right\}$$

ここで，右辺第一項及び第二項は零と近似できる：第一項は平均で置きかえれば$<\mathbf{P}_n^2>$で，絶対零度近くの Bose 系では零と近似できる。[4] そうすれば，

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, T_{in}] = \frac{(\hbar/i)}{2m}\cdot\frac{\hbar^2k^2}{2}\sum_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$$

同様にして，

$$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, T_{in}] = \frac{(\hbar/i)}{2m}\cdot\frac{\hbar^2k^2}{2}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$$

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, [\Pi_p^{\mathbf{k}}, T_{in}]] = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_n e^{-2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left\{2\mathbf{p}_n^2 - 4\hbar(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) + \frac{3}{2}\hbar^2k^2\right\}$$

$$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, [\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, T_{in}]] = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_n e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\left\{2\mathbf{p}_n^2 + 4\hbar(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n) + \frac{3}{2}\hbar^2k^2\right\}$$

$$[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, [\Pi_p^{\mathbf{k}}, T_{in}]] = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_n\left\{6\mathbf{p}_n^2 + \frac{1}{2}\hbar^2k^2\right\}$$

$$= -\frac{\hbar^4}{4m} k^2 N$$

ここで，$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, [\Pi_p^{\mathbf{k}}, T_{in}]]$, $[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, [\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, T_{in}]]$ は我々の近似で零となる。　更に $[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}, [\Pi_p^{\mathbf{k}}, T_{in}]]$ に対してはBose condensation の近似を用いた。従って

$$\begin{cases} T_0 = T - \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{k^2}{2Nm} \Pi_p^{\mathbf{k}} \overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{N\hbar^2 k^2}{4m} \xi_p^{\mathbf{k}} \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}} \\ T_1^{+} = 0, \quad T_1^{-} = 0, \quad T_2^{++} = 0, \quad T_2^{--} = 0, \quad T_2^{+-} = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 k^2}{4m} N, \end{cases} \tag{3・15}$$

となり，Hamiltonian は次の様に分離できる。

$$H = H_p + H_{in} + H' \tag{3・16}$$

$$H_p = T_{p.c} + V_{p.c}$$

$$= \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{k^2}{2Nm} \Pi_p^{\mathbf{k}} \overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} N \left\{ \frac{\hbar^2 k^2}{4m} + NV_{\mathbf{k}} \right\} \xi_p^{\mathbf{k}} \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}} \tag{3・17}$$

$$H_{in} = T_0 + V_0$$

$$= T - \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{k^2}{2Nm} \Pi_p^{\mathbf{k}} \overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{N\hbar^2 k^2}{4m} \xi_p^{\mathbf{k}} \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}}$$

$$+ V - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} N^2 V_{\mathbf{k}} \xi_p^{\mathbf{k}} \bar{\xi}_p^{\mathbf{k}} \tag{3・18}$$

$$H' = 0 \quad (\text{phonon と particle との interaction}) \tag{3・19}$$

H_{in} を整理すれば，

$$H_{in} = \sum_n \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m^*} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} \sum_{|\mathbf{k}| > k_c} V_{\mathbf{k}} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'})}$$

$$- \sum_{n \neq n'} \sum_{\mathbf{k} \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_n)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_{n'})}{2Nmk^2} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'})}$$

$$+\sum_{n\neq n'}\sum\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}\frac{\hbar[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n)-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_{n'})]}{4Nm}\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}$$

$$+\frac{1}{2}N^2V_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}=0)-\frac{1}{2}N\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}V_{\mathbf{k}} \qquad (3\cdot20)$$

ここで,

$$m^*=m/(1-\frac{S}{3N}),\quad S=\sum_{\mathbf{k}\neq 0}^{k_c}=\frac{k_c^3}{6\pi^2}\ , \qquad (3\cdot21)$$

で, S は phonon callective motion の自由度の数である。

§4. Calculation of Phonon Excitation Energy

相関を無視すれば, (3•17) 式より phonon excitation energy $\varepsilon_p(k)$は,

$$\varepsilon_p(k)=[(\frac{\hbar^2}{2m})^2k^4+\frac{N}{m}\hbar^2k^2V_{\mathbf{k}}]^{1/2},\quad 0<k<k_c$$

と求まる。

§5. 内部座標の導入

Tomonaga の方法によって Hamiltonian は次の様に分離された。

$$H=H_p(\xi_p^{\mathbf{k}},\Pi_p^{\mathbf{k}})+H_{in}(\mathbf{R}_n,\mathbf{P}_n)$$

ここで H_{in} の変数 $\mathbf{R}_n$, $\mathbf{P}_n$ は phonon collective motion に対する internal motion を記述する座標と運動量であり, その具体的な形を求めるには次の条件を満たすように決定されるべきである。

$$\left\{\begin{array}{ll}[\Pi_p^{\mathbf{k}},\mathbf{R}_n]=[\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}},\mathbf{R}_n]=0 & (5\cdot1)\\ [\mathbf{P}_n,\xi_p^{\mathbf{k}}]=[\mathbf{P}_n,\overline{\xi}_p^{\mathbf{k}}]=0 & (5\cdot2)\\ [\mathbf{P}_n,\Pi_p^{\mathbf{k}}]=[\mathbf{P}_n,\overline{\Pi}_p^{\mathbf{k}}]=0 & (5\cdot3)\end{array}\right.$$

（5・1）を満たす R_n は近似的に次の形に求めることができる。

$$R_n = r_n - \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{q_c} \{ [\Pi_p^q, r_n] \xi_p^q + [\bar{\Pi}_p^q, r_n] \bar{\xi}_p^q \} \tag{5・4}$$

（5・2），（5・3）を同時に満たす P_n はやはり近似的には，

$$P_n = p_n - \frac{(i/\hbar)}{2} \sum_{q \neq 0}^{q_c} \{ [p_n, \xi_p^q] \Pi_p^q + [p_n, \bar{\xi}_p^q] \bar{\Pi}_p^q - [p_n, \Pi_p^q] \xi_p^q - [p_n, \bar{\Pi}_p^q] \bar{\xi}_p^q \} \tag{5・5}$$

と求まる。

R_n は次の様に書きかえることができる。

$$\begin{aligned} R_n &= r_n + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0}^{q_c} \{ \frac{iq}{q^2} e^{-iq \cdot r_n} . \xi_p^q - \frac{iq}{q^2} e^{iq \cdot r_n} . \bar{\xi}_p^q \} \\ &= r_n + \frac{1}{N} \sum_{n' \neq n} \sum_{q \neq 0}^{q_c} \frac{q}{q^2} \sin q \cdot (r_n - r_{n'}) \ , \end{aligned} \tag{5・4'}$$

と書け，R_n は全べて独立ではなく，次の関係によって互に従属しあっている。

$$\sum_n e^{i k \cdot R_n} = 0 \qquad (|k| < k_c) \tag{5・5}$$

従って，R_n の自由度の数は phonon の cutoff mnmentum k_c によって制限を受けている。即ち，phonon の自由度がＳ個存在すれば，上式の関係式はＳ個存在することになり，R_n の自由度は（5・5）の関係式によって自動的に（3N－S）に制限されている。従って H_{in} の独立変数として内部座標 R_n を explicit に導入しておいても何ら自由度に対して混乱は生じない。

§6.　むすび

Tomonaga の方法をＳ－モードへ拡張して得られた我々の結果は興味深いものがある。まず第一に，Hamiltonian が phonon Hamiltonian H_p と internal Hamiltonian H_{in} に完全に分離できたことである。ただし我々は potential terms の計算に対しては R.P.A を用い，kinetic terms に対しては Bose condensation による近似を用

いた。第二点は internal Hamiltonian は Bohm-Salt 等が二度に渡る canonical 変換を行って得た結果と同じものが得られたことである。即ち第一項は effective kinetic energy term であり，第二項は Residual short-range interaction term (screening potential) であり，第三項は Long-range (dipole-dipole) interaction term である。 第三点は内部運動を取り扱う時に有用になるのであるが，(5・1) の条件を満たすように選んだ内部座標 R_n，(5・4) 或は (5・5) は Brenig [5)] が，連続方程式を満足するように決めて導入した内部座標と同じ形になっていることである。この内部座標 R_n は phonon cloud を伴った back flow effect (近似的に dipole back flow となっている) を含んでいる。

References

1) L.D.Landau : J.Phys. (U.S.S.R) 5, (1941) 71.
2) D.C.Henshaw and A.D.B.Woods : Phys.Rev. 121, (1961) 1266.
3) S.Tomonaga : Prog.Theor.Phys. 13 (1955) 467, Prog.Theor.Phys. 13 (1955) 482.
4) D.Bohm and B.Salt : Rev.of Mod.phys. 39, (1967) 894.
5) W.Brenig : Zeit. Physik. 144, (1956) 488.