

17. Vortex Field 中でのロトンの束縛状態

東大・工 井 口 家 成

回転していない液体ヘリウム中での自由なロトンの分散式は、ランダウの提唱した放物線型で、そのエネルギーギャップは $\Delta = 8.65^\circ \text{K}$ 、波数は $P_0/h = 1.91 \text{\AA}^{-1}$ くらいになることが知られている。ところで液体ヘリウムが回転している状態では、回転軸の方向を軸とする量子化された渦糸が一様に分布するが、各渦糸はそのまわりに超流動速度ベクトル $\vec{v}_s = (k/2\pi r) \varphi$ で表わされる速度場を持っている。ただし、 k には量子化された循環でその値は h/m で与えられる。今この渦糸の付近に存在する準粒子を考えるとそのエネルギーは渦糸のない場合に比べ $\vec{P} \cdot \vec{v}_s$ だけ違ってくる。もし $\vec{P} \cdot \vec{v}_s < 0$ ならエネルギーが自由のものよりさがり束縛状態（或いは局在化した状態）が実現することになる。ここではロトンが渦糸にトラップされたものと考え、その分散式を変分法を用いて求めてみる。ロトンのモデルハミルトニアンとしては通常分散式から推量されたものを使うが、ずれた放物線の形では座標表示で解けないので $P \simeq P_0$ では実質的に変りのない4次型の分散式をつかう。このモデルハミルトニアンを用いた散乱問題では満足な結果を与えており¹⁾、ここでは束縛問題にも有効と考える。

さて、ロトンは vortex field が存在する場合、次の Schrodinger 型の波動方程式を満足すると仮定する。

$$\left(\Delta + \frac{(P^2 - P_0^2)^2}{8\mu P_0^2} + \vec{P} \cdot \vec{v}_s \right) \psi = E \psi$$

オペレーターの座標表示では $P^2 = -\hbar^2 \nabla^2$ 、 $\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$ で $\vec{P} \cdot \vec{v}_s$ は

$$\vec{P} \cdot \vec{v}_s = -\frac{i\hbar^2}{mr^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

と表わされる。上の方程式の束縛状態を求めるわけであるが、正しく解くことはほぼ不可能で、エネルギーに対する変分法を用いてみる。

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\varphi} \phi_l(r) e^{ik_z z}$$

と書けば、エネルギー最小の条件は

$$\delta I = 0 \quad \text{但} \quad , \quad I = \int_0^{\infty} \bar{\phi}_\ell H_\ell \phi_\ell r dr \quad / \quad \int_0^{\infty} \bar{\phi}_\ell \phi_\ell r dr$$

試行函数としては Feynman に倣い²⁾, $\phi_\ell(r)$ は滑らかに変化する函数(たとえばガウス型など)と考え, 具体的に $\phi_\ell(r) \sim r^n e^{-\lambda r^2}$ なる形を仮定する。ここで n の値は方程式の原点付近の振舞を調べることにより $n = \pm l, 2 \pm l$ ときまる。この4つの場合の夫々に対応する計算を行ない, $\partial I / \partial \lambda = 0$ によって各エネルギーモードを定める。得られた4つの分散式のうち物理的に正しく且つエネルギーの低いモードは, 次のものであることがわかる。

$$E_\ell = \Delta_\ell + \frac{(P_z^2 - SP_0^2)^2}{8\mu P_0^2 (|\ell| + 2)}$$

$$\text{ここで} \quad \Delta_\ell \equiv \Delta - \frac{2\mu P_0^2}{m^2} \frac{1}{|\ell| + 1}, \quad S \equiv 1 - \frac{4\mu}{m}$$

量子数 ℓ は負の整数 ($-1, -2, \dots, -\infty$) のみをとる。上のエネルギーギャップ Δ_ℓ を $|\ell|$ の函数としてプロットすると Fig 1 のようになる。最もエネルギーの低い分枝は $\ell = -1$ であり, $\Delta_1 \sim 2^\circ\text{K}$ となる。こ 値は Glaberson et al³⁾ が半古典的に計算して得た最低エネルギーと同じぐらいで上の変分法の適切さを裏付けている。

又, 渦糸との相互作用では軸方向 (z 方向) の運動量は関与しなく, 自由なロトンと同じはずであるが, 上の分散式 P_z^2 の熱力学的期待値は $\langle P_z^2 \rangle = SP_0^2 \approx \frac{1}{3} P_0^2$ になって得られた分散式が妥当なことを示している。又, 求めた分散式が実際正しいものに近いかどうか調べるためには実験イオンの易動度のデータと間接的だが比較してみる。

渦糸の軸に沿って負イオンが進むとき, 自由なイオンの運動に比べてはるかに大きな抵抗をうけることがわかっているが⁴⁾, この抵抗の原因として渦糸に束縛されたロトンによる散乱と考えて計算してみる。運動が1次元的なので易動度の式は次のように求まる。

$$\frac{e}{\mu_T} = -\frac{2\hbar}{\pi} \sum_{\ell < 0} \int_0^{\infty} dk_z k_z^2 \left| \frac{dE_\ell}{dk_z} \right| \left| \frac{\partial n_\ell}{\partial E_\ell} \right| F_\ell \left| R_0(k_z) \right|^2$$

ここで $|R_0(k_z)|^2$ はイオンの静止系におけるロトンの反射率, n_ℓ は束縛状態ロトンに対する Bose-Einstein 分布である。又, 因子 F_ℓ は

$$F_\ell \equiv \int_0^A |\phi_\ell(r)|^2 r dr / \int_0^{\infty} |\phi_\ell(r)|^2 r dr$$

によって定義され、これは散乱を1次元の問題として扱ったとき、運動学がイオンの半径 A のオーダー付近で cut-off されることを考慮したものである。さて、上式の右辺はロトン散乱が高エネルギー散乱 ($k_0 A \gg 1$) に対応するものと考え、反射率を1と仮定すると積分は簡単にできて

$$\frac{e}{\mu_T} = \frac{4\hbar S k_0^2}{\pi} \sum_{\ell < 0} \left[\frac{1}{e^{\Delta_\ell / k_B T} - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{e^{(\Delta_\ell + \xi_\ell) / k_B T} - 1} \right] F_\ell$$

となる。ここで $\xi_\ell \equiv S^2 P_0^2 / 8\mu(|\ell| + 2)$

右辺の括弧内の第2項は束縛ロトンの有効質量が $|\ell|$ が増加とともに大きくなっていくための補正項である。負イオンへの抵抗として働くのは精々 $|\ell| \simeq (20 \sim 30)$ までの分枝である。 $k_0 = P_0 / \hbar = 1.91 \text{ \AA}^{-1}$, $\mu = 0.15m$ と選んだときの μ_T の値を温度の関数としてプロットしたものが Fig. 2 である。但し Δ の温度変化は $\Delta(T) = 8.68 - 0.0084 T^7$ の経験式を用いた。特徴的に言えることは μ_T の値は熱力学的にはエネルギーの低い方の若干の分枝によってきまってしまうので、渦糸にトラップされた負イオンの大きさ、形には殆どよらないということである。実験との一致はかなり良く、求めた分散式の物理的に正しいものに近いと考えることができる。温度の低い方 ($T \leq 0.8 \text{ K}$) では Vortex wave による散乱し効いてくると言われているが、この計算ではその寄与を考えなくても実験データを説明できる。中空の芯に基づいた Vortex wave の計算とロトンが芯の中心まで存在すると仮定したこのモデルでは、根本的に違う点があるがこの問題は渦糸の芯の構造問題と絡んで、今後検討していく必要がある。回転ヘリウムに対する中性子散乱の実験では、上に求めたようなエネルギーギャップが見られない⁵⁾、ちょっと計算してみるとこれは液体ヘリウム中の渦糸の密度が非常に小さくバルクのロトンによる効果に比べて測定できないほど小さい値になるので当然と言えよう。このエネルギーギャップの効果を観測する可能な実験は、何らかの形で外からエネルギーを与え束縛状態のロトンを渦糸から解放して渦糸にトラップされた負イオンの軸方向の易動度を測定することであろうと思われる。

参 考 文 献

- 1) I. Iguchi, J. Low Temp. Phys. 4 637 (1971) 5 353 (1971)
- 2) R. P. Feynman, Phys. Rev. 94 262 (1954)

井口家成

- 3) W.I.Glaberson, D.M Strayer and R.J.Donnelly, Phys. Rev. Letters 21 1740 (1968)
- 4) W.I.Glaberson, D.M Strayer and R.J.Donnelly, Phys. Rev. Letters 20 1428 (1968) R.L.Dougllass, Phys. Rev. 174 255 (1968)
- 5) A.D.B.Woods, Can. J. Phys. 39 1082 (1961)

Fig. 1

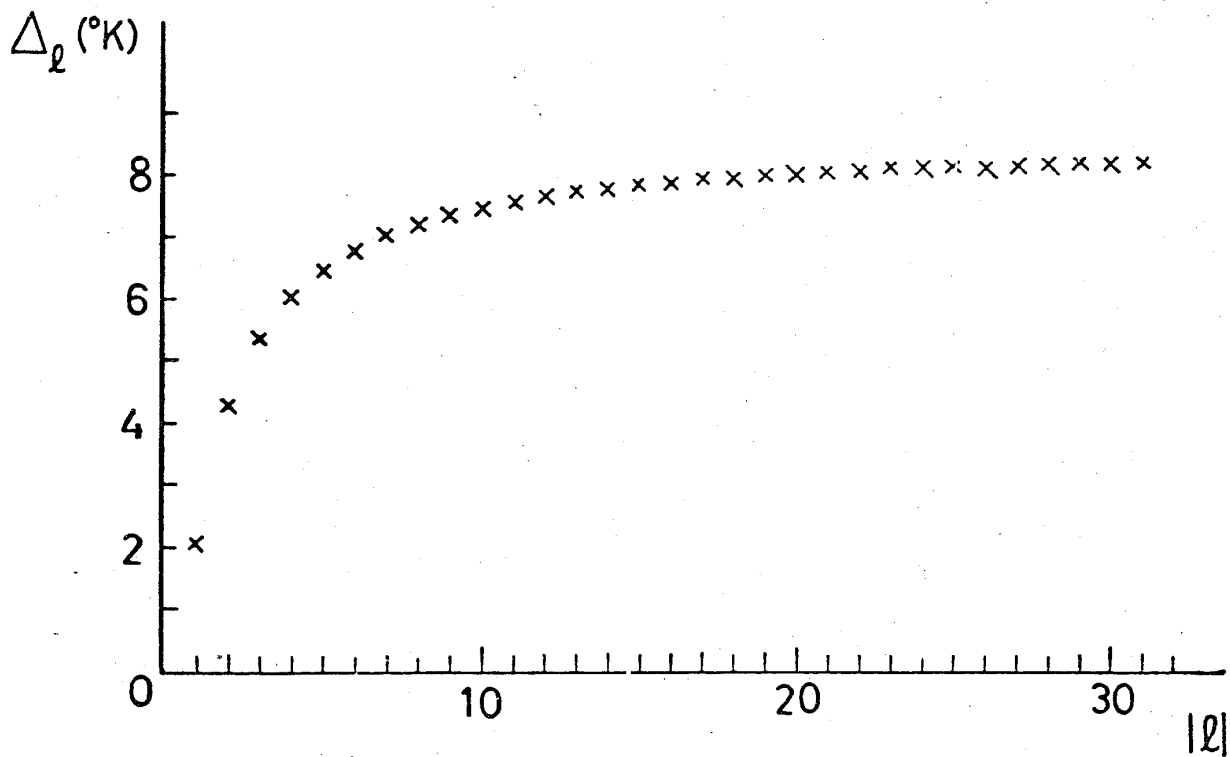


Fig. 2

