6. ボーズ流体における相転移と Scaling law

茨大理　菅野正吉

1. はじめに

Widom[1]－Kadanoff[2]のscaling lawは，弱い磁場内のIsing modelから求められたものである。ボーズ流体はMatsubara－Matsuda[3]によって示されたように，easy planeを持つ強い磁場内のスピン系に対応している。従って，Widom－Kadanoffのscaling lawが，そのままボーズ流体の相転移に適用できるかどうかは明らかでない。

最近，Migdal[4]がグリーン関数の方法によって粒子分布 n_p ($=\langle a_p^+ a_p \rangle$) に対し，$\lambda$－点の近くでscaling lawが成り立つこと，即ち $|p| \lesssim p_0$ (characteristic momentum) に対して，

$$n_p = r_c^{2-\eta} \; g(r_c p) \tag{1}$$

の形に表わせることを示した。たゞし $r_c \sim \varepsilon^{-\nu}$ ($\varepsilon = |\mu - \mu_c|$) はcorrelation lengthである。そして，$C_p \sim \varepsilon^{-\alpha}$ とおくと，$3\nu = 2 - \alpha$ が成り立つことを示した。しかし，彼の得た結果には矛盾があり，その結論が正しいかどうかは分らない。

こゝでは n_p に対して，scaling lawが成り立つ，即ち(1)を仮定したとき熱力学量のcritical exponentsの間にはどのような関係が成り立つか調べる。さらに，これとはべつに，λ－点において $n_p \sim 1/p^{2-\eta}$ ようになるとしたとき，相転移はどのようになるか，Landauのフェルミ流体の理論[5]と同じような方法によって考察する。

2. Scaling law

a) normal phase：　λ点で n_p が存在するためには，$x \to \infty$ で $g(x) \sim x^{-(2-\eta)}$ でなければばらむらい。従って，$r_c^{-1} \lesssim p < p_0$ に対して，

$$n_p^{-1} \sim p^{2-\eta} + C \, r_c^{-(2-\eta)} (r_c p)^s \,, \quad p < 2-\eta, \ C：定数 \tag{2}$$

ように書ける。これから

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \Sigma_p \frac{\partial n_p}{\partial \mu} \sim \frac{1}{\varepsilon} \Sigma_{p \lesssim p_0} n_p{}^2 \; r_c{}^{-(2-\eta)} (r_c p)^s$$

$$\sim \begin{cases} \varepsilon^{-1} \; r_c{}^{(1+\eta)} & 1-2\eta \geq s \text{ のと} \\ \varepsilon^{-1} \; r_c{}^{2-\eta-s} & 1-2\eta < s \text{ のと} \end{cases}$$

λ－点 近くでは，$c_p \sim \partial N/\partial \mu$ であることに注意して $c_p \sim \varepsilon^{-\alpha}$ とおくと，上から

$$(1+\eta)\,\nu \geq 1-\alpha \tag{3}$$

等式は，$1-2\eta \geq s$ のとき成り立つ。n_p に対する scaling law の仮定にもかかわらず，(3) ような不等式になるのは運動量と同じ次元を持つものに $r_c{}^{-1}$ の他に p_0 があることによる。〔このことについては，鈴木増雄氏から weak scaling の考え方と関係があるとの御指摘があった。〕Migdal は(2)における s の値を求めているが，その値を用いて，C_p を計算すると彼の結論とは違ったもになる。

b） Condensed phase： grand potential Ω を μ と N_0（condensation density）の関数と考える。N_0 の平均値は Ω の minimum 即ち $\partial\Omega/\partial N_0 = 0$ から求まる。この条件から，

$$0 = d(\partial\Omega/\partial N_0) = (\partial^2\Omega/\partial N_0{}^2)\, dN_0 + (\partial^2\Omega/\partial\mu\partial N)\, d\mu$$
$$\equiv \gamma(0)\, dN_0 - \alpha(0)\, d\mu$$

λ－transition であることと安定性から

$$\frac{\partial N_0}{\partial \mu} \geqq 0\,,\ \gamma(0) \geqq 0 \qquad \therefore\ \alpha(0) \geqq 0 \tag{4}$$

仮定から

$$\gamma(0) N_0 \sim \alpha(0)\,\varepsilon \sim r_c{}^{-(2-\eta)\nu} \tag{5}$$

なぜなら，N_p を p を含む cell Δp^3 にある粒子の個数と，Ω を N_p の関数と考えれば，N_p の平均値は

$$0 = \partial\Omega/\partial N_p \cong -g_p/N_p + \varphi(p), \qquad g_p = V\Delta p^3/(2\pi)^3$$

から求まる。たゞし，右辺の第 1 項はエントロピーの第 2 項は $E-\mu N$ の N_p による微分からくる。こゝで $p \to 0$，$g_p \to 1$ 極限を考えれば $\partial\Omega/\partial N_0 = \lim_{p\to 0} \varphi(p)$

となる。$\partial\Omega/\partial N_0 \sim \gamma(0)N_0-\alpha(0)\varepsilon$, $\varphi(p) \sim p^{2-\eta}$ に注意すれば(5)が得られる。

さて

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{N_0} + \left(\frac{\partial N}{\partial N_0}\right)_{\mu} \left(\frac{\partial N_0}{\partial \mu}\right)$$

$\partial N/\partial N_0 = \alpha(0) \geq 0$ に注意すれば，上式の各項は正である。従って

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \geq \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{N_0} , \quad \frac{\partial N}{\partial \mu} \geq \alpha(0)\left(\frac{\partial N_0}{\partial \mu}\right) \tag{6}$$

Critical exponents を次のように定義する。

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \sim \varepsilon^{-\alpha'}, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{N_0} \sim \varepsilon^{-\alpha}, \quad N_0 \sim \varepsilon^{2\beta}$$

(3)を求めたときと同じようにして $(1+\eta)\nu \geq 1-\alpha$ を得る。これと(5), (6)から

$$(1+\eta)\nu \geq 1-\alpha' \tag{7}$$

$$2\beta + (2-\eta)\nu \geq 2-\alpha' \tag{8}$$

$\gamma' = (2-\eta)\nu$ とおくと(8)は Rushbrooke[6] によって求められた関係 $\gamma' + 2\beta \geq 2-\alpha'$ に形式的に一致する。

(1)式の仮定は condensed phase においては N_0 を独立変数とみなしたとき，$n_p \sim \varepsilon^{-(2-\eta)\nu} g(\varepsilon^{-\nu}p, N_0/\varepsilon^{2\beta})$ と書けることを意味している。そうすると，Ωは次のように書けることが示される。

$$\Omega \sim \varepsilon^{2-\alpha} + \varepsilon^{2\beta+(2-\eta)\nu} F(N_0/\varepsilon^{2\beta}) \tag{9}$$

こゝに，$F(0)=0$であり，$F(N_0/\varepsilon^{2\beta})$ は，$N_0 \sim \varepsilon^{2\beta}$ のとき最小になる。(1)式の仮定からだけでは，$2-\alpha = 2\beta+(2-\eta)\nu$ を結論することはできない。Rippard[7), 2)] と同じような議論によって

$$2\beta = (1+\eta)\nu$$

を得る。それは，ある点のまわり（体積 r^3）で fluctuation によって$N_0=0$になったとすると，Ωは $r^3 \varepsilon^{2\beta+(2-\eta)\nu} |F(1)|$ だけ大きくなる。これから $r_c{}^3 \varepsilon^{2\beta+(2-\eta)\nu} \sim kT_c$ となり，(10)を得る。

もしも，$1 \geq 2\beta$，$\alpha' = 0$ を仮定すると，(7)と(8)から $1 = 2\beta = (1+\eta)\nu$，$\eta \leq 1/2$ でなければならない。

3. 比　　熱

Partition function $Z = \Sigma \langle \{n_p\} | e^{-\beta H} | \{n_p\} \rangle$ （$|\{n_p\}\rangle$: 粒子分布によって指定される free state）への最大寄与を考えることにより，自由エネルギーは $\{n_p\}$ の functional と考えることができる。即ち，$F = E\{n_p\} - TS\{n_p\}$ のように表わされる。（その際，p−space を cell に分ける等の工夫がいる）n_p の平均値は，自由エネルギーの minimum から求まる。

$$n_p = 1/\left[\exp\{\beta(\delta E/\delta n_p - \mu)\} - 1\right]$$

Bose condensation は $\mu = \delta E/\delta n_0$ のとき起る。

$$d(\delta E/\delta n_p - \mu) = -\alpha(p)\, d\mu + \gamma(p)\, dN_0 \tag{11}$$

とおくと，$\delta E/\delta n_p$ は，$\{n_k\}$ の functional であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} &\alpha(p) + \Sigma f(p,k)\chi_k\ \alpha(k) = 1 \\ &\gamma(p) + \Sigma f(p,k)\chi_k\ \gamma(k) = f(p,0) \\ &f(p,k) = \delta^2 E/\delta n_p\, \delta n_k, \qquad \chi_p \cong n_p{}^2 \end{aligned} \tag{12}$$

(11) で $p = 0$ とおいたものから，$\partial N_0/\partial\mu = \alpha(0)/\gamma(0)$ を得る。$f(p,k)$ はフェルミ流体の理論における Landau f−function に相当するものである。
フェルミ流体では $|P| \cong p_F$ 近くだけを考えればよかったが，ボーズ流体においては $|P| \lesssim p_0$ のものを全部考えなければならない。

λ−点で，$n_p \sim 1/p^{2-\eta}$ を仮定すると，Ladder 近似で，$f(p,k) \sim |p+k|^{1-2\eta}$ となることが示される。これを用いて，(12)式の両辺に χ_p や $\chi_p f(0,p)$ をかけて，p について積分したりすることにより，$0 < \eta < \frac{1}{2}$ のとき，

$$\Sigma\ \chi_p\ \alpha(p) \sim \Sigma\ \chi_p\ f(0,p) \sim \log(1/\varepsilon)$$
$$\alpha(0) \sim r_c{}^{2\eta-1}(\log\varepsilon)^2,\quad \gamma(0) \sim r_c{}^{2\eta-1},\quad r_c \sim \varepsilon^{-1/(1+\eta)}$$

を得る。$\eta = 1/2$ のときは，上の式で $\log(1/\varepsilon)$，$r_c{}^{2\eta-1}$ をそれぞれ

$\log[\log\varepsilon]$, $\log(1/\varepsilon)$ におきかえればよい。$\partial N/\partial\mu\sim\Sigma\,\chi_p\,\alpha(p)$ 及び$\partial N_0/\partial\mu=\alpha(0)/r(0)$ に注意すれば

$$C_p\sim\begin{cases}\log(1/\varepsilon)\\ \log[\log(1/\varepsilon)]\end{cases},\quad N_0\sim\begin{cases}\varepsilon(\log(1/\varepsilon))^2\\ \varepsilon(\log[\log(1/\varepsilon)])^2\end{cases}$$

たゞし，下段の式は $\eta=1/2$ ものである。Critical exponents で書くと，$1=2\beta=(1+\eta)\nu$ となる。N_0 の fluctuation は

$$\langle\Delta N_0{}^2\rangle\sim r(0)^{-1}\sim\varepsilon^{-(1-2\eta)/(1+\eta)}$$

$$(\text{or}\ \log(1/\varepsilon),\ \eta=1/2\text{のとき})$$

となり，これは density fluctuation $\partial N/\partial\mu$ よりずっと大きい。

References

1) B.Widom, J.Chem.Phys. 43 (1965) 3898, 3892
2) L.P.Kadanoff, Physics 2 (1966) 263
3) T.Matsubara and H.Matsuda, Prog. Theor. Phys. 16 (1956) 569
4) A.A.Migdal, Soviet Phys. JETP 28 (1969) 1036
5) L.D.Landau, Soviet Phys. JETP 3 (1956) 920
6) G.S.Rushbrooke, J.Chem.Phys. 39 (1963) 842
7) A.B.Pippard, Proc. Roy. Soc. London A216 (1953) 547