4. $H_e^3 - H_e^4$ 混合液の有限温度におけるエネルギースペクトル

東教大・理　宗　田　敏　雄

混合液の中にはボゾンによる素励起とフェルミオンの素励起とそれにボゾンとフェルミオンの密度のゆらぎによる相互作用がある。

系のハミルトニアンは

$$H = H_B + H_F + H_{FB} \tag{1}$$

で，こゝでボゾンの素励起の創生演算子 b_λ^{+q} 消滅演算子 $b_\lambda{}^q$ とそのエネルギー $\omega_\lambda{}^q$ とし， λは第1分枝と第2分枝の純粋の He^4 での，混合液での He^4 の密度を持つ励起を表わすと，フェルミオンのそれを a_μ^{+q} ， $a_\mu{}^q$ 及びエネルギーを $\varepsilon_\mu{}^q$ とする。但し，μは一対励起，零音波励起等のボゾン型励起を表わすとする。そうすると

$$H_B = \sum_{\lambda, q} \omega_\lambda{}^q \; b^{q*}_\lambda \; b_\lambda{}^q \tag{2}$$

$$H_F = \sum_{\mu, q} \varepsilon_\mu{}^q \; a_\mu{}^{q*} \; a_\mu{}^q \tag{3}$$

また密度のゆらぎを $\rho_q{}^B$ と $\rho_q{}^F$ とすると（ $\rho_q = \rho_{-q}^*$ ），相互作用は

$$H_{FB} = \Sigma_q \; v_q \; P_q{}^B \; P_{-q}^E \tag{4}$$

v_q はボゾンとフェルミオン間相互作用ポテンシャルである。今この ρ_q も各々の素励起演算子で展開すると

$$\rho_a{}^B = \Sigma_\lambda (B_\lambda^{q*} \; b_\lambda{}^{q*} + B_\lambda{}^{-q} \; b_\lambda{}^{-q}) \tag{5}$$

$$\rho_q{}^F = \Sigma_\mu \;(A_\mu{}^{q*} \; a_\mu{}^{q*} + A_\mu{}^{-q} \; a_\mu{}^{-q}) \tag{6}$$

となる。こゝで $B_\lambda{}^q$, $A_\mu{}^q$ とかは展開係数である。(5)と(6)を(4)に代入して(1)の永年方程式を解くと，ボゾン・フェルミオンの合成系のエネルギー E^q が次の方程式の解として求まる[1)]。

$$g(E^{q2}) = 1 - v_q{}^2 \sum_\lambda \frac{2\omega_\lambda{}^q\ |B_\lambda{}^q|^2}{E^{q2} - \omega_\lambda{}^{q2}} \sum_\mu \frac{2\varepsilon_\mu{}^q\ |A_\mu{}^q|^2}{E^{q2} - \varepsilon_\mu{}^{q2}} = 0 \quad (7)$$

こゝでv_qの大きさを$T=0$でHe^3の濃度6.4%で合成系がようやく安定になる($E^{q2}<0$より$E^{q2}=0$になる)点と考えてSum ruleによってしめる[2)]。更に$|B_\lambda{}^q|^2$の大きさをSum ruleを用いて第1分枝のエネルギーω_1と第2分枝のエネルギーω_2と構造因子S_qで表わすと[3)]次の様になる。こゝでN_Bはボゾン数，$\langle H\rangle_q$は平均励起エネルギー$q^2/2mS_q$である。

$$|B_1{}^q|^2/N_B = S_q(\omega_2 - \langle H\rangle_q)/(\omega_2 - \omega_1) \quad (8)$$

$$|B_2{}^q|^2/N_B = S_q(\langle H\rangle_q - \omega_1)/(\omega_2 - \omega_1) \quad (9)$$

更に(7)の第2項のフェルミオンの項について，粒子空孔の一対励起が一番効くとして$|A_\mu{}^q|^2=1$と置き，$\varepsilon_\mu{}^q = \underline{p}\cdot\underline{q}/m + q^2/2m$と置くと，第2項は次の形になる。

$$\sum_p \frac{2(\underline{p}\underline{q}/m + q^2/2m)}{E^{q2} - (\frac{\underline{p}\underline{q}}{m} + q^2/2m)^2} f_p \equiv N_F I(q, T) \quad (10)$$

こゝにf_pは分布関数である。前述のv_qの大きさは

$$v_q{}^2 = m_B\ m_F\ S_F{}^c\ S_B{}^2 / N_c{}^F\ N^B \quad (11)$$

で与えられる。こゝにmは質量でSは等温音速で，添字のcはHe^3の濃度が6.4%を表わし，Nは粒子数。

今，合成系での純粋の時の第1分枝からのエネルギーのずれをΔ_1^qとすると，(7)式に$\Delta_1{}^q$を小さいとして

$$E^q = \omega_1{}^q + \Delta_1{}^q \quad (12)$$

を代入 て$\Delta_1{}^q$を求めると

$$\Delta_1{}^q = \frac{\frac{1}{2} m_F S_F^{c2} (S_B{}^c)^2 (N^F / N_c{}^F)\, I(q \cdot T) \frac{\omega_1{}^q}{\langle H \rangle_q} \frac{\omega_2 - \langle H \rangle_q}{\omega_2{}^q - \omega_1{}^q}}{1 + m_F S_F{}^{c2} (S_B q)^2 (N^F / N_c{}^F)\, I(q \cdot T) \frac{\omega_2}{\langle H \rangle_q} \frac{\langle H \rangle_q - \omega_1}{\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2 \quad \omega_2 - \omega_1}} \tag{13}$$

となる。今$T < \varepsilon_F$なら$I(q \cdot T)$をSommer feld展開を ，$T > \varepsilon_F$で$q \gg p_F$なら，フェルミスペクトルからHe^{3}の不純物スペクトルに移行して

$$I(q \cdot T) \simeq \frac{1}{N_F} \sum_p e^{-\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_F}{T}} \left(\frac{1}{\omega - q^2/2m_F} + \frac{1}{\omega + q^1/2m_F} \right)$$

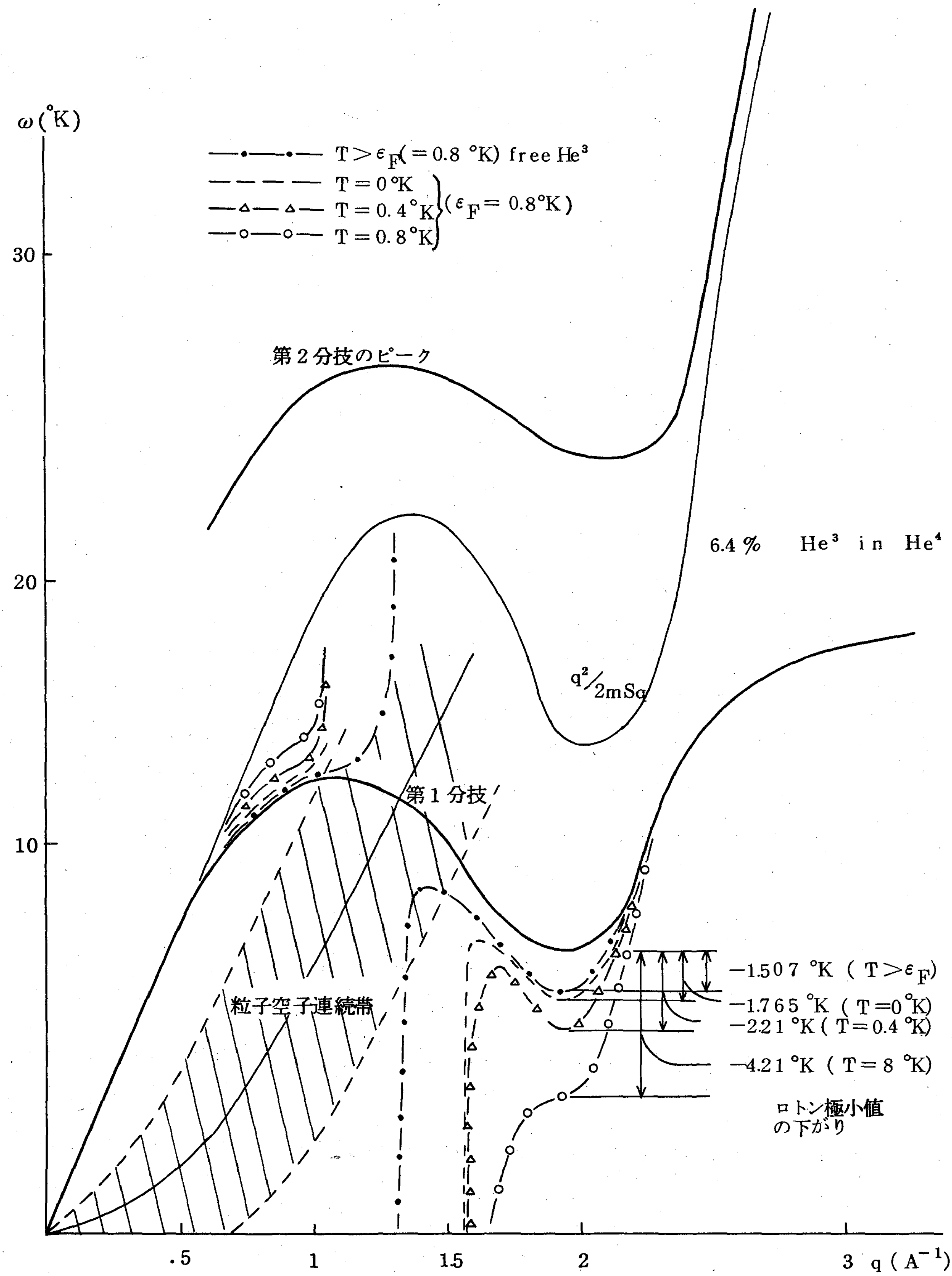
$$= \frac{1}{\omega - q^2/2m_F} + \frac{1}{\omega + q^2/2m_F} \tag{14}$$

と置ける。6.4％のHe^{3}の濃度でフェルミ温度$\varepsilon_F = p_F{}^2/2m = 0.8°K$に対して$T = 0°K$，$0.4°K$，$0.8°K$及び$T \gg 0.8°K$での第1分枝のずれを図示すると第1図の様になる。$T = 0.8°K$での大きなずれはフェルミ面のくずれTが$\varepsilon_F$のオーダーで大いことを示している。こゝではずれ$\Delta_1{}^q$の1次のセツ動しか取らないが，もしくりこみを入れて高次のセツ動を入れると，ずれの曲線はいづれも連続帯の上下の境界曲線に接て来る筈である。

1） T.Nagata, T.Sode and K.Sawada, Prog,Theor. Phys. 38 (1967) 1023

2） T.Soda, K.Sawada and T.Nagata, Prog Theor,Phys. 44 (1970) 524

3） T Soda, K.Sawada and T.Nagata, Prog.Theor. Phys, 44 (1970) 860


ω (°K)
T > ε_F (= 0.8 °K) free He³
T = 0 °K
T = 0.4 °K
T = 0.8 °K
(ε_F = 0.8 °K)
30
20
10
第２分技のピーク
6.4 % He³ in He⁴
q²/2mSq
第１分技
粒子空子連続帯
−1.507 °K (T > ε_F)
−1.765 °K (T = 0 °K)
−2.21 °K (T = 0.4 °K)
−4.21 °K (T = 8 °K)
ロトン極小値
の下がり
.5
1
1.5
2
3 q (A⁻¹)

第１図

宗田氏の研究報告に対する質疑応答

碓井氏　One Phonon branch と two phonon branch を独立に扱ってもよいのか？

宗田氏　互いに独立の素励起と　て取扱って良い。

栗原氏　Soda − Sawada − Nagata の phase separation の仕事との関連はどうなっているか？

宗田氏　v_q として，そこで定められたものを用いた。

栗原氏　phase separation line を定める際に，unstable になった mode と今のものとの関連は，どうなっているのか？

宗田氏　前の仕事で，unstable になる mode は $He^3 - He^4$ 系の collective mode であって，今回のは $He^3 - He^4$ 相互作用を入れることによって one − phonon branch のずれを計算　た。