

## 長距離力を持つ $n$ -ベクトル模型の臨界指数

—— 次元, 対称性 (自由度), ポテンシャル・レンジと臨界指数 ——

東大物性研 鈴木 増 雄

一般に, 臨界指数は, 次元  $d$ , 対称性 (または自由度  $n$ ), ポテンシャル・レンジ  $\sigma$  に依存する。最近, くりこみ群の方法を併用して臨界指数を展開し,  $d$  と  $n$  の依存性が主に調べられている。<sup>1-5)</sup>

ここでは, 臨界指数が3つのパラメタ  $d$ ,  $n$ ,  $\sigma$  にどう依存するかを,  $\frac{1}{n}$ -展開<sup>6)</sup>と  $\epsilon$ -展開<sup>1,5)</sup>を用いて研究した結果を報告する。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j); \quad J_{ij} = J_0 r_{ij}^{-(d+s)} / \sum_j r_{ij}^{-(d+s)}, \quad (1)$$

で与えられる。<sup>7,8)</sup> 但し,  $\mathbf{S}_j$  は  $n$  個の連続な値をとる  $\{\sigma_{jk}\}$  を成分とするベクトルである:<sup>7)</sup>

$$\mathbf{S}_j = (\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \dots, \sigma_{jn}); \quad \sum_{k=1}^n \sigma_{jk}^2 = n \quad (2)$$

$n \rightarrow \infty$  の極限は, 長距離力を持つ spherical model<sup>7)</sup> になる。

さて, 帯磁率  $\chi$  が次の異常性を示すとする:

$$\chi = (T - T_c(\lambda))^{-r(\lambda)}; \quad \lambda = \frac{1}{n}. \quad (3)$$

その  $\lambda$  に関する微分は, 次のようになる:<sup>9)</sup>

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv \left( \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \simeq T_c'(0) r(0) (T - T_c(0))^{-r(0)-1} - (T - T_c(0))^{-r(0)} \\ &\quad \times r'(0) \ln(T - T_c(0)) \\ &\simeq T_c'(0) r(0) x_0 / (T - T_c(0)) - r'(0) x_0 \ln(T - T_c(0)). \end{aligned} \quad (4)$$

従って,  $\chi_1$  の中の  $x_0 \ln(T - T_c(0))$  の項を調べることにより,  $r'(0)$  がわかり,<sup>9,10)</sup>

$$r(\lambda) = r(0) + \frac{1}{n} r_1 + \dots \quad (5)$$

鈴木増雄

と展開形式で臨界指数が求まることになる。今の問題では、Abe<sup>6)</sup>によると、 $\chi_1$  は次式で表わされる。

$$\chi_1 = -\frac{\mu_B^2}{kT} \times \frac{2N(\xi)}{(2\pi)^d} \int \frac{\mu(q)}{\nu(q)} d^d q, \quad (6)$$

但し、 $\mu(q) = G(q)\nu(0) - n(q)$ 、 $N(\xi) = G^2(0)/\nu(0)$ 、

$$\nu(q) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int G(k)G(q-k) d^d k,$$

$$\begin{aligned} n(q) &= -(2K)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \nu(q) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int G^2(k)G(q-k) d^d k. \end{aligned} \quad (7)$$

短距離力 ( $s \rightarrow \infty$ ) の場合<sup>6)</sup> と違って、一般の  $s$  の我々の問題では、propagator  $G(k)$  は、小さな  $k$  に対して

$$G(k) = \frac{K^{-1}}{\xi + ak^\sigma}; \quad K = \frac{J_0}{kT}, \quad (8)$$

となる。<sup>8)</sup> 但し、 $\sigma$  は、 $\sigma$  を用いて次のように定義された “effective potential range” である。

$$\sigma = s \text{ for } 0 < s < 2 \text{ and } \sigma = 2 \text{ for } s > 2. \quad (9)$$

さらに、 $\xi$  は、次のような漸近形<sup>8)</sup> を持つ温度変数である：

$$\begin{aligned} \xi &\sim (K_c - K)^{\sigma/(d-\sigma)} && \text{for } \frac{d}{2} < \sigma < d, \\ &\sim (K_c - K) && \text{for } 0 < \sigma < \frac{1}{2}d, \end{aligned} \quad (10)$$

Wilson<sup>5)</sup> に従って、1 より大きい任意の実数  $d$  に対して、次の公式により、連続次元  $d$  を導入する：

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-d} \int d^d k f(k^\sigma) &= K_d \int_0^\infty k^{d-1} f(k^\sigma) dk \\ (2\pi)^{-d} \int d^d k f(k^2, k \cdot q) &= (2\pi)^{-1} K_{d-1} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^{d-1} (\sin \theta)^{d-2} \\ &\quad \times f(k^2, kq \cos \theta), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{但し、} K_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} [\Gamma(d/2)]^{-1}. \quad (12)$$

このようにして、 $\chi_1$  の中の対数異常性を示す項を探すことにより、次の結果が得られる。(但し、 $\lambda=0$  のときの帯磁率  $\chi_0$  は  $\chi_0 = \mu_B^2 / (J_0 \xi)$  で与えられる。)

(i) classical region :  $0 < \sigma < \frac{1}{2}d$ . この領域では、 $r'(0) = 0$  となり、少なくとも、 $\frac{1}{n}$  の次数までは、臨界指数  $r$  は  $r=1$  となり、分子場理論の値をとる。くりこみ群の方法を用いると、もっと一般に、任意の  $n$  に対して、この領域が classical であることが示される。即ち、 $\sigma_c = \frac{1}{2}d$  という臨界値が存在する。ただ、ここで注意すべきことは、 $\chi_1$  の計算から、 $\chi$  には、 $\frac{1}{3}d < \sigma < \frac{1}{2}d$  では、次のような "confluent singularity" が存在することが示されることである：

$$\chi \simeq b_1 \xi^{-1} + b_2 \xi^{-(3-d/\sigma)} + O(1), \quad (13)$$

即ち、 $\sigma$  が  $\sigma_c = \frac{1}{2}d$  に近いときには、(13) の第 2 項は、第 1 項の異常性よりも弱いけれども、非常に近い発散を示す。このために、Nagle-Bonner<sup>11)</sup> の 1 次元の数値計算では、 $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{1}{2}$  のところでも、 $r > 1$  の値が見かけ上、得られたのであろう。

(ii) Non-classical region :  $\frac{1}{2}d < \sigma$ . この領域で、 $\xi / q^\sigma \ll 1$  に対して、 $\mu(q)$ ,  $\nu(q)$  の漸近形を求め、 $\mu(q) / \nu(q)$  を調べると、

$$\frac{\mu(q)}{\nu(q)} = -\frac{C}{A} \frac{1}{q^\sigma} - \frac{AD-BC}{A^2} \frac{\xi^{d/\sigma-1}}{q^d} - \frac{E'}{A} \frac{\xi^{(d-2\sigma+2)/\sigma}}{q^{d-\sigma+2}} + ((\text{higher})), \quad (14)$$

となる。但し、

$$\begin{aligned} A &= K^{-2} a^{-2} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{A}, \quad B = K^{-2} a^{-d/\sigma-1} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{B}, \\ C &= K^{-3} a^{-3} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{C}, \quad D = K^{-3} a^{-2-d/\sigma} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{D}, \\ E' &= K^{-3} a^{-(d+\sigma+2)/\sigma} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{E}'. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{A} = \left[ \Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right) \right]^2 \Gamma\left(\sigma - \frac{1}{2}d\right) / \left\{ \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma\right) \right]^2 \Gamma(d-\sigma) \right\}, \quad (16)$$

$$\hat{B} = -4 \Gamma(2-d/\sigma) \Gamma(d/\sigma-1) / \left\{ \sigma \Gamma\left(\frac{1}{2}d\right) \right\}, \quad (17)$$

$$\hat{C} = \Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\sigma-d}{2}\right) / \left\{ \Gamma(\sigma) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) \Gamma\left(d-\frac{3\sigma}{2}\right) \right\},$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \hat{B},$$

$$\hat{E}' = -\frac{(\sigma-d+2)(d-\sigma+2)}{d\sigma} \times \Gamma\left(3-\frac{d+2}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{d+2}{\sigma}-2\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}d\right). \quad (18)$$

鈴木増雄

こうして、次の2通りの場合が存在する。

Case a) :  $D < \sigma < 2$ . このときは、

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{\mu(q)}{\nu(q)} d^d q \right)_{\log} &= \left( K_d \int_{\xi^{1/\sigma}}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\nu(q)} q^{d-1} dq \right)_{\log} \\ &= \frac{AD-BC}{A^2} \frac{K_d}{\sigma} \xi^{d/\sigma-1} \ln \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

従って、 $x_1$  の対数発散の項は次式で与えられる：

$$(x_1)_{\log} = - \frac{2 (\widehat{\widehat{AD-BC}})}{\widehat{A^2}} \frac{x_0 \ln \xi}{B(2-d/\sigma, d/\sigma)} ;$$

$$B(x, y) = \Gamma(x) \Gamma(y) / \Gamma(x+y). \quad (20)$$

そこで、 $\ln \xi \simeq \{ \sigma / (d - \sigma) \} \ln (K_c - K)$  に注意すると、臨界指数  $r$  は次のように求まる：

$$\begin{aligned} r &= \sigma / (d - \sigma) + (1/n) r_1 + O(1/n^2), \\ r_1 &= \{ 2 \sigma / (d - \sigma) \} \cdot \{ (\widehat{\widehat{AD-BC}}) / \widehat{A^2} \} / B(2-d/\sigma, d/\sigma). \end{aligned} \quad (21)$$

これは、一般に、 $\frac{d}{\sigma}$  だけの関数にはならず、今までの予想<sup>8)</sup>は正しくないことがわかる。

Case b) :  $\sigma = 2$ . このときには、(14) の第3項が第2項と同じ異常性を示すようになり、 $r_1$  は、次式で与えられる：

$$r_1 = 4 (d-2)^{-1} B^{-1} (2-d/2, d/2) \left[ \{ \widehat{\widehat{A(D+E)}} - \widehat{\widehat{BC}} \} / \widehat{A^2} \right]_{\sigma=2}. \quad (22)$$

これは、Abe<sup>6)</sup> や Ma<sup>6)</sup> によって得られた結果と一致する。

a) と b) の結果から、 $r$  は  $\sigma = 2$  のところで  $\sigma$  に関して飛びが存在することになる。

その飛び  $\Delta r_1$  は、次のようになる：

$$\begin{aligned} \Delta r_1 &\equiv r_1 (\sigma=2) - \lim_{\sigma \rightarrow 2-0} r_1 (\sigma) = 2 (d-4) (d-2)^{-2} \\ &\quad \times \left[ B(2-d/2, d/2) B(d/2-1, d/2) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

また、臨界指数は、パラメタ  $a$  即ち、格子の微細構造には依存しないことがわかる。さらに、 $s > 2$  では、potential-range  $s$  にも依らず、 $s \rightarrow \infty$  のときの値をとる。この意味で、 $s > 2$  の相互作用を short-range potential と呼ぶことができる。

次に、Wilson にならって、 $\epsilon$ -展開を行う。我々の問題は

$$\epsilon = d_c - d = 2(\sigma - \sigma_c) = 2\sigma - d, \quad (24)$$

と定義される。 $\epsilon$  の一次までの結果は、次式で与えられる： $(\sigma > \frac{1}{2}d)$

$$2\nu = r = 1 + \frac{n+2}{n+8} \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) + O(\epsilon^2), \quad \eta = 2 - \sigma + O(\epsilon^2),$$

$$\varphi = 1 + \frac{n}{n+8} \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) + O(\epsilon^2), \quad (25)$$

これをさらに  $\frac{1}{n}$ -展開すると、 $\frac{1}{n}$ -展開の結果で  $\epsilon$ -展開した式と  $\frac{\epsilon}{n}$  の次数までは完全に一致する。また (25) で、 $\sigma \rightarrow 2 - 0$  とすると、明らかに Wilson<sup>5)</sup> の結果と一致する。但し、 $\Delta r_1 \propto O(\epsilon^2)$  であることに注意せよ。

#### 参 考 文 献 :

- 1) K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Letters 28, 240 (1972)
- 2) K. G. Wilson, Phys. Rev. Letters 28, 548 (1972).
- 3) M. E. Fisher and P. Pfeuty, Phys. Rev. (in press).
- 4) F. Wegner, Phys. Rev. (in press).
- 5) K. G. Wilson, Phys. Rev. B4, 3174, 3184 (1971).
- 6) R. Abe, Prog. Theor. Phys. (in press). (この研究会報告参照)  
S. Ma は  $n$ -成分ボーズ系で、Abe と本質的に同じ結果を得た。
- 7) H. E. Stanley, Phys. Rev. 176, 718 (1968).
- 8) G. S. Joyce, Phys. Rev. 146, 349 (1966).
- 9) M. Suzuki, Phys. Rev. Letters 28, 508 (1972).
- 10) L. Kadanoff and F. Wegner, Phys. Rev. B4, 3989 (1971).
- 11) J. F. Nagle and J. C. Bonner, J. of Physics C, 3, 352 (1970).