1）を出し, Scaling Lawが破れる事を示した。次に $\varepsilon \approx 1$ の場合には $s^6$ 項が分子場からのずれとして重要になり，対称性も異なるため n 依存性も変ってくる。したがって $d=3$ を議論する場合は(1)のハミルトニアンでは不十分である。

References

1) K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett 28, 548 (1972).
2) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Field (Wiley, 1959).
3) A.M. Polyakov, Sov. Phys. JETP 28, 553 (1969).
4) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 28, 1036 (1969).
5) M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. 28, 507 (1972).
6) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 32, 552 (1971).

# 臨界指数に対する 1／n 展開

東大教養　　阿　部　龍　蔵

最近，Wilson[1)]は臨界指数に対する $\varepsilon$ 展開（$\varepsilon = 4 - d$，d：空間の次元数）を求めることに成功した。彼の理論でスピン次元数 n は任意である。ここでは，逆に d は任意であるとし，臨界指数を 1／n のべきで展開する方法について述べる。1／n 展開は $\varepsilon$ 展開と異なり，系統的な展開が比較的簡単に導かれるが，簡単のため，帯磁率の指数 $\gamma$ に注目し，1／n の最低次の項を求める。$\varepsilon$ 展開と 1／n 展開とは共通の領域（$\varepsilon \ll 1$，$1/n \ll 1$）をもつので，互いの結果のチェックとしても使いうる。

われわれの出発点は Stanley の理論[2)]である。彼は j 番目の格子点に n 次元のベクトル

$$\mathbf{S}_j = \{ \sigma_j(1),\ \sigma_j(2),\ \cdots,\ \sigma_j(n) \}$$

を対応させる。ただし，成分 $\sigma_j(m)$ は

$$\sum_{m=1}^{n} \sigma_j^2(m) = n$$

を満たす連続変数とする。また，磁場のないときのハミルトニアンを

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\,\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

とする。帯磁率 $\chi$ は（ trivial factor を除いて）

$$\chi = \frac{1}{nN} < \sum_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j >$$

で与えられる。

Stanley は $n \to \infty$ の極限で，$\chi$ は Spherical model の値と一致することを示したが，彼の理論を拡張し，$\chi$ に対する補正項を求めると

$$\chi = \chi_0 - \frac{2A}{nN}\sum_{\mathbf{q}} \frac{J(\mathbf{q})}{\nu(\mathbf{q})} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

と表わされる。ただし

$$A = \frac{g^2(0)}{N^{-1}\sum_{\mathbf{q}'} g^2(\mathbf{q}')}, \qquad g(\mathbf{q}) = \frac{1}{2t - K(\mathbf{q})}$$

$$\nu(\mathbf{q}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k})\, g(\mathbf{q}-\mathbf{k}),$$

$$J(\mathbf{q}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} g^2(\mathbf{k})\,[\, g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{q}-\mathbf{k})\,]$$

であり，また $K(\mathbf{q})$ は $K_{ij} = \beta J_{ij}$ の Fourier 変換である。

d 次元の単純立方格子を考え，最近接相互作用を仮定すると

$$K(\mathbf{q}) = 2K(\cos q_1 + \cdots\cdots + \cos q_d)$$

である。 $t = KZ$，$s = 2(z-d)$ とおき

$\nu(\mathbf{q})$ を計算するさい，$K(\mathbf{q})$ の $q^2$ まで考慮し

$$g(\mathbf{q}) \simeq \frac{1}{K(s+q^2)}, \qquad q^2 = q_1^2 + q_2^2 + \cdots\cdots + q_d^2$$

と近似する。その結果，$\nu(\mathbf{q})$ は

阿部龍蔵

$$\nu(\mathbf{q})=\frac{1}{K^2 2^d \pi^{d/2}}\frac{\Gamma[2-(d/2)]}{[s+(q^2/4)]^{2-(d/2)}}F(2-\frac{d}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x)$$

と計算される。ただし，$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ は超幾何関数。また $x=q^2/(4s+q^2)$

Spherical model に対する exponent を $\gamma_0$ $[=2/(d-2)]$ とすれば $A \propto \varepsilon^{-\gamma_0-1}$。

また $4s \lesssim q^2$ のとき

$$\frac{J(\mathbf{q})}{\nu(\mathbf{q})}\propto[-\frac{C}{2q^2}+3\frac{s^{(d/2)-1}}{q^d}+(\text{高次の項})]$$

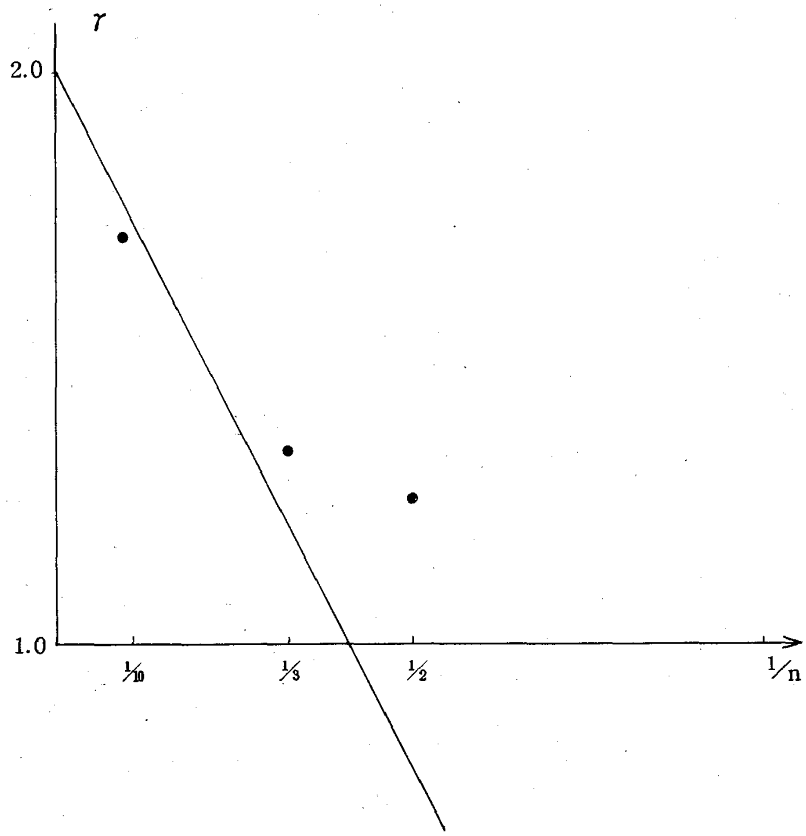
で示される。$\gamma$ の補正は第2項より生じ，matching の条件から（鈴木氏の報告参照）$2<d\leqq4$ に対して

$$\gamma=\frac{2}{d-2}-\frac{6}{n}\frac{\sin(d\pi/2)\Gamma(d-1)}{(2-d)\pi[\Gamma(d/2)]^2}+0(\frac{1}{n^2})$$

がえられる。$d=4-\varepsilon$ とおき，$\varepsilon$ 展開すると，Wilson の式を $1/n$ まで展開したものと完全に一致する。とくに，$d=3$ では

$$\gamma=2-\frac{24}{\pi^2 n}+0(\frac{1}{n^2})$$

となる。この結果を図示すると図の直線で現わされる。丸印は Stanley[3] の数値計算の結果である。




## 文　献


1) K.G. Wilson, Phys. Rev. Letters 28 (1972), 548.

2) H.E. Stanley, Phys. Rev. 176 (1968), 718.

3) H.E. Stanley, Phys. Rev. Letters 20 (1968), 589.