氷上　忍

初期値が $g_0=0$， $g_0=6u_0$ のときは独立な２つのIsing系に等価だから，Ising like な臨界指数が得られ，$0<g_0<6u_0$ のときは，X－Y like な解が安定な解となる。２次元の Baxter model と異なって今の場合（$d=4-\varepsilon$）には臨界指数は連続的変化を示さない。

# 臨界指数の Feynmman－Graph 展開について

東大物理　五十嵐儀孝

## §0　Introduction

臨界指数を物理量の転移点での異常性からではなく，直接的に摂動展開や Recursion 公式により求める方法が進歩しつつある。ここでは特にK．G．Wilson[1)] による次元数展開に関し，その方法と Renormalization－Group との関係について述べる。 $d>4$ で分子場近似が正しいとの予想から，$\varepsilon=4-d$ を微少量として，臨界指数を $\varepsilon$ 展開し，$d\leqq4$ での値を求める画期的方法であるが，多くの摂動展開と同様 Asymptotic 展開になっている。

## §1　Free energy－Hamiltonian

$$H/kT=\int\{\frac{1}{2}r_0 s^2(x)+\frac{1}{2}[\nabla s(x)-\nabla\nabla^2 s(x)]^2+u_0 s^4(x)\}d^dx \tag{1}$$

$u_0$ の項が分子場からのずれを表わしていると考えて，Graph では $u_0$ で展開する。また $\nabla\nabla^2 s$ の項は $k\gg1$ の発散をとめるために付けたものであり，場合によっては cut off をする事で除ける。

$s^2=\Sigma s^\alpha s^\alpha$ では $1\leqq\alpha\leqq n$ で，nは内部自由度を示し，Ising（$n=1$），X－Y，Helium（$n=2$），Heisenberg（$n=3$），spherical（$n=\infty$）に対応する。内部対称性は $s^2=s^\alpha s^\alpha$，$s^4=(s^2)^2$ により決定される。また異方性は $s^2=\Sigma J_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta$ とすれば考慮できる。

## §2　Correlation Function と Green 関数

相関関数を Graph の方法で計算する一般的な手段[2)]により，次の変換をおこなう。

$$x_1 \to it\ ,\ k_1 \to -i\omega\ ,\ \nabla^2 \to \Box\ ,\ d^d x \to i\, dt\, d^{d-1} x \equiv i\, dx' \tag{2}$$

すると，相対論的場の理論から，相関関数を Green 関数で表わす事ができて，例えば，sの2体相関は，

$$i < s^{\alpha}(x)\, s^{\beta}(y) > \equiv i \int s^{\alpha}(x)\, s^{\beta}(y) \exp[-\beta H\{s\}]\,\delta s \Big/ \int \exp[-\beta H\{s\}] \times \delta s$$

$$= i \int s^{\alpha}(x)\, s^{\beta}(y) \exp[\, i \int \mathscr{L}(x')\, dx'\,]\,\delta s \Big/ \int \exp[\, i \int \mathscr{L}(x')\, dx'\,]\,\delta s$$

$$= i < \hat{T}\, s^{\alpha}(x)\, s^{\beta}(y)\, S >_0 / < S >_0$$

$$= G^{\alpha\beta}(x, y) \tag{3}$$

ここで Lagrange 形式から Hamilton 形式に変換すれば，

$$S = T\ \exp[-i \int \mathscr{H}_1(x')\, dx'\,]\ ,\ \mathscr{H}_1(x') = u_0\, s^4(x') \tag{4}$$

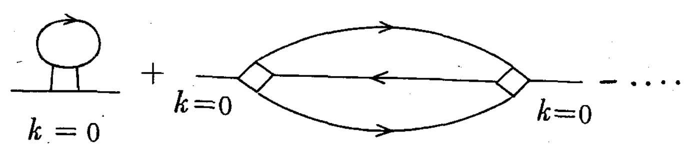
Wick の定理を用いた後に（2）の逆変換をすると，$G_0^{\alpha\beta}$ は Fourier 変換の形で，

$$G_0^{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{k^2(k^2+1)^2 + r_0}\,\delta_{\alpha\beta}\ . \tag{5}$$

これで任意の相関関数を Graph の方法を用いて計算することができる。

## §3　Renormalization of $r_0$

自己エネルギー部分で k に依存しない部分を $r_1$ として，$r = r_0 - r_1$ を新しく変数にする。

$r_1 = r_1(r, \epsilon, u_0) \equiv -$  $\cdots\cdots$ (6)


以後 $G_0^{\alpha\beta}(k)$ を，このくりこみをした free Green 関数とする。

$$G_0^{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{k^2(k^2+1)^2 + r}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{7}$$

$r_1$ の定義(6)の内線　　は(7)の $G_0$ を用いる。ところで $r_0$ は分子場の $\chi_0^{-1}$ であるから $r_0 = T - T_0$ である。また $r_0 = r + r_1(r)$ より，新しい転移点 $r = 0$ に対応する $r_0$ の値は，$r_{0c} = r_1(0)$ である。すると新しい転移温度 $T_c$ は，$r_{0c} = T_c - T_0$ で与えられるので，

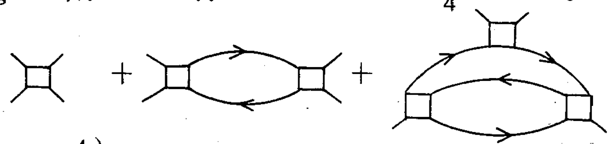
$$r_0 - r_{0c} = r R(r, u_0, \varepsilon) = T - T_c. \tag{8}$$

ここで，$R = 1 + \{ r_1(r) - r_1(0) \} r^{-1}$ で定義され，新たに帯磁率が $\chi = r^{-1} \propto (T - T_c)^{-\gamma}$ なる異常性を示すとすれば

$$R(r, u_0, \varepsilon) \propto r^{\gamma^{-1}-1}. \qquad (r \to 0) \tag{9}$$

## §4　$u_R$ と4－Body Spin　相関関数

Wilsonによれば，$u_R \equiv -g(0, 0, 0)/4!\ g^4(0)$ で $u_R$ を定義しているが，$g(0, 0, 0) = G^{\mathrm{II}}(0, 0, 0) - 3G^2(0)$ は4体のCumulant相関 $Q_4(0, 0, 0)$ であり，$4!\ g^4$ で割れば4体のvertex[3] $\Gamma_4$ になる。

$u_R =$  $+ \cdots .$　(10)

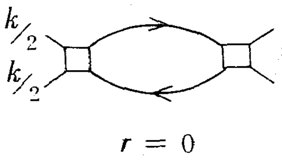
Unitarity cond[4] から $u_R$ の $r \to 0$ でのふるまいを求める事ができる。Migdal の与えたものを一般次元 d に拡張すると，

$$\Gamma_n = Z^{-n/2} (TM^d)^{1-n/2} \gamma_4 (p_i/M). \tag{11}$$

$M \to 0$ で $G = z g(p^2/M^2) \propto p^{\eta-2}$ より，$Z \propto M^{\eta-2}$ となり，$\Gamma_4(p_i \to 0) \propto z^{-2} \times M^{-d} = M^{4-d-2\eta}$ を得る。ところで，$M \propto (T - T_c)^{\nu} = r^{\nu/\gamma}$ であるが，$\gamma = \nu(2-\eta)$ なる現象論的な関係をさらに用いれば，$\Gamma_4 \propto r^{\omega}$，$\omega = \varepsilon - 2\eta/2 - \eta$ を得る。

## §5　d－Dimensional　Technic

d次元単位球の表面積 $\sigma_d$ を $(2\pi)^d$ で割った量が $K_d$ である。計算の都合上 $G_0^{\alpha\beta}$ は(7)の代りに，$G_0^{\alpha\beta} = (k^2 + r)^{-1} \delta_{\alpha\beta}$ を用いて，適当な cut offをする事もできる。例として次のGraphを調べる。



$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \; \frac{1}{(k-p)^2} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \int_0^1 dx$$

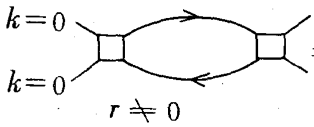
$$\times \frac{1}{\{ x(k-p)^2 + (1-x) p^2 \}^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p \int_0^1 dx \frac{1}{\{ (p - xk)^2 + x(1-x) k^2 \}^2}$$

$$= \frac{K_d}{2} \int_0^1 dx \int_0^{\infty} dp \, p^{1-\varepsilon/2} (p+1)^{-2} k^{-\varepsilon} \{ x(1-x) \}^{-\varepsilon/2}$$

$$= \frac{K_d}{2} B(2 - \varepsilon/2, \varepsilon/2) B(1-\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2) k^{-\varepsilon} \qquad (12)$$

$k \ll 1$ の場合，$\varepsilon > 0$ では $u_0 s^4$ 項が効くが，$\varepsilon < 0$ では効かず，分子場近似がよい事を意味している。同様に次の Graph は，



$$= \frac{K_d}{2} B\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{-\varepsilon/2}. \qquad (13)$$

cut off の方法は種々考えられるが，例えば (12) では，$k^{-\varepsilon} = (1 - \varepsilon \ln k + \frac{\varepsilon^2}{2} \ln^2 k \cdots)$ と展開すると，$B(2-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ の展開で現れる $\frac{2}{\varepsilon}$ で，$\varepsilon \to 0$ で第 0 次項は発散するので，これを除けば，(7) の $G_0$ を用いた事に相当する。

内部自由度の数は，外線を $G_0^{\alpha\alpha}$ とし，$\frac{1}{2!} u_0^2 \Sigma \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{a'b'} \delta_{c'd'}$ の総和をおこなえばよいが，(a, b, c, d) と (a′, b′, c′, d′) でそれぞれ 2 つを $\alpha$ 成分と考え固定する。

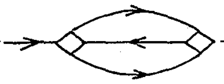
## § 6　Wilson の Matching Conditon

Wilson の臨界指数の求め方は，Kadanoff の picture に従った現象論的な要請を G(k, r) と $u_R(r)$ に対して課するものである。

$$G(k, r=0) \propto k^{\eta-2} \; (k \ll 1), \quad R(r) \propto r^{r^{-1}-1} \; (r \ll 1)$$

$$u_R(r) \propto r^{\omega}, \; \omega = \varepsilon - 2\eta/2 - \eta \quad (r \ll 1). \qquad (14)$$

これは strong な条件であり，Asymptotic な G，$u_R$ のふるまいを現象論的に規定する

のであり，これに従う項を，微視的な Graph 展開から抽出する様になっている。例えば，$k \ll 1$ では Graph 展開より $k^2 G(k) = 1 +$  $+ \cdots\cdots$ を得るが，第２項は $k^{-2\epsilon}$ に比例し，これを $\epsilon$ 展開すると，$(1 - 2\epsilon\ \ell n\, k + 2\epsilon^2\, \ell n^2\, k - \cdots\cdots)$ になる。一方現象論的な要請 $k^2 G(k) \propto k^{\eta} = 1 + \eta\, \ell n\, k + \cdots\cdots$ と両方の $\ell n\, k$ の係数だけを比較して，$\eta = \eta(\epsilon, u_0)$ を得る。これが Matching 条件であり，$R(\epsilon, u_0, \ell n\, r)$ や $u_R(\epsilon, u_0, \ell n\, r)$ に対しても同様の事を行う。これら条件式は長いので省略するが，$u_R$ の条件式より $u_0$ を $\epsilon$ に関して逐次に求める事ができて，$u_0$ を消去できる。これで４次元からと，分子場近似からのはずれの関係がついた。この様にして $\gamma$，$\eta$，$\phi$ 等を定めると，Wilson の論文の (1)(2)(3) 式になり，次元，内部自由度，対称性のみ依存する。この方法の特徴は (14) を用いて $u_0$ を消去した所にあり，$\epsilon \to 0$ で $u_0(\epsilon) \to 0$，すなわち $d = 4$ で分子場が正しいと言う注目すべき事実が示された。

## §7　Renormalization Group − Matching − Strong scaling の諸関係

Wilson の方法を R−group 理論の立場から調べてみよう。例えば $\eta$ を求めるため G に対する Lie の微分方程式を考えよう。

$$\frac{\partial\, \ell n\, G(x, y, u_0)}{\partial\, \ell n\, x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\, \ell n\, G\left(\xi, \frac{y}{x}, u_0 d^2(x, \tilde{y}, u_0)\right)\Big|_{\xi=1} \qquad (15)$$

$$x = k^2/\lambda^2, \quad y = r/\lambda^2, \quad \tilde{y} = \tilde{r}/\lambda^2, \quad t = \tilde{\lambda}^2/\lambda^2$$

$$d(k^2, r, z^2 u_0; z) = G(k^2, r, z^2 u_0; z)/G_0 \qquad (16)$$

$$d(\tilde{\lambda}^2, \tilde{r}, z^2 u_0; z) = 1 \quad (\text{規格化点}) \qquad (17)$$

(17) で $z = 1$ にした場合に，これを満たす $\tilde{\lambda}$，$\tilde{r}$ を $\lambda$，$r$ となし得る。それは (17) より，$d(\tilde{\lambda}^2, \tilde{r}, u_0; 1) = 1$ を (16) に入れた場合，$G \simeq G_0$ なる $\tilde{\lambda}$ として $\tilde{\lambda} \approx 2\pi/a$（a：相互作用距離）ととれば，物理的考察から明らかに，$\tilde{r}$ として実際の r をとることができる。$\tilde{\lambda}$，$\tilde{r}$ は特に指定はしないが，$d = 1$，$z = 1$ を満たす $\tilde{\lambda}$，$\tilde{r}$ を $\lambda \equiv 2\pi/a$，r（実際の量）とした。

$T = T_c$ で $r = 0$（$y = 0$）であり，この時 (15) の右辺は，$G^{-1}(1, u_0 d^2(x, \tilde{y}, u_0))\, \partial\, \ell n\, G(\xi, u_0 d^2(x, \tilde{y}, u_0))/\partial \xi$（$\xi = 1$）になる。すなわち，右辺の x

依存性は $d^2(x, \tilde{y}, u_0)$ を通して効いてくる。例えば $\tilde{y}=0$ の場合は, $d^2(x) \approx k^{2\eta}$ であり分子場近似が良好なら $\eta \approx 0$ となり, 4次元に近ければ $d^2$ の k 依存性は弱い。一般に $\tilde{y}$ を適当に選べば $d^2(x, \tilde{y}, u_0) \approx 1$ にする事ができて, 結局(15)は次の様になる。

$$\frac{\partial\, \ell n\, G(x, u_0)}{\partial\, \ell n\, x} = G^{-1}(1, u_0)\frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi, u_0)\Big|_{\xi=1} \tag{18}$$

この様に右辺の x 依存性を除く近似が strong－scaling であり, 臨界指数が k に依存しない形の Kadanoff picture となり (14) の要請に一致する。実際 (18) を 1 から x まで積分すると,

$$\ell n\{G(x, u_0)/G(1, u_0)\} = G^{-1}(1, u_0)\frac{\partial}{\partial \xi}G(\xi=1, u_0)\cdot \ell n\, x. \tag{19}$$

今 $a=2\pi$ なる長さの単位を選べば, $x=k^2$ で (19) は,

$$G(k^2, u_0) = G(1, u_0)\, k^{\sigma}, \quad \sigma \equiv G^{-1}(1, u_0)\frac{\partial}{\partial \xi}G(\xi=1, u_0) \tag{20}$$

に帰する。つまり $\sigma \to \eta - 2$ を意味する。

次に Matching 条件で $\ell n\, k$ の係数だけを比較して $\eta$ を求める事は, (20) で $G(\xi, u_0)$ を Graph で計算し $\ell n\, \xi$ を展開した場合, $\partial/\partial\xi\ (\xi=1)$ の演算で残るのが $\ell n\, \xi$ の一次の項だけであるので, 正当化される。

M. Suzuki[5] の Matching 条件はもっと一般的であり, $H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \cdots\cdots$ なるハミルトニアンを考え, $\lambda$ は次元, 対称性, 相互作用型を $H_0$ のから変える微少パラメーターとする。その際 $H_0$ は既に解きうるものと考え, 物理量, 例えば $G(\tau, \lambda)$ を $\lambda$ 摂動展開する。一方 $G(\tau, \lambda) \propto \{\tau(\lambda)\}^{-\gamma(\lambda)}$ なる現象論的な要請を置き, これを $\lambda$ 展開し, $\lambda(0)$ の解析的性質が同じものの係数関数を等しいとする。これにより $\gamma^{(n)}(0)$ を Graph 計算で表わせるので, $\gamma(\lambda)$ を $\lambda$ 展開型で求め得る。この方法も R－group の立場から理解できる。

## §8　Comments

Wilson の方法は R－group の立場から理解できたが, (14) の条件は (15) を正確に解けば, $\eta$ が k 依存性を示すので正しくない。Migdal[6] は実際 $\eta \propto \ell n^{-2} k\ (\ell n\, k^{-1} \gg$

1）を出し，Scaling Lawが破れる事を示した。次に $\varepsilon \approx 1$ の場合には $s^6$ 項が分子場からのずれとして重要になり，対称性も異なるためn依存性も変ってくる。したがって $d=3$ を議論する場合は(1)のハミルトニアンでは不十分である。

References

1) K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett 28, 548 (1972).
2) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Field (Wiley, 1959).
3) A.M. Polyakov, Sov. Phys. JETP 28, 553 (1969).
4) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 28, 1036 (1969).
5) M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. 28, 507 (1972).
6) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 32, 552 (1971).

# 臨界指数に対する1／n展開

東大教養　阿部龍蔵

最近，Wilson[1)]は臨界指数に対する $\varepsilon$ 展開（$\varepsilon=4-d$，d：空間の次元数）を求めることに成功した。彼の理論でスピン次元数nは任意である。ここでは，逆にdは任意であるとし，臨界指数を1／n のべきで展開する方法について述べる。1／n展開は $\varepsilon$ 展開と異なり，系統的な展開が比較的簡単に導かれるが，簡単のため，帯磁率の指数 $\gamma$ に注目し，1／nの最低次の項を求める。$\varepsilon$ 展開と1／n展開とは共通の領域（$\varepsilon \ll 1$，$1/n \ll 1$）をもつので，互いの結果のチェックとしても使いうる。

われわれの出発点はStanleyの理論[2)]である。彼はj番目の格子点にn次元のベクトル

$$\mathbf{S}_j = \{ \sigma_j(1),\ \sigma_j(2),\ \cdots,\ \sigma_j(n) \}$$

を対応させる。ただし，成分 $\sigma_j(m)$ は