(ii) ξがゼロでない値を正確に得る方法？

(iii) 2次元系を正確に扱いうる方法？

(iv) $T < T_c$ の低温側を議論できる方法？

(v) Widom−Kadanoff のスケィリング則が上述の定性的な解析に対して成立つかどうか？

(vi) r-s，m-s を $2^{\pm 1}$ の比で区分したが，“2”？にまつわる問題。

を指摘したが，既に，文献2)によって解決されたところもある。

最後に，Wilsonによって導びかれた反復式が正確に成立つ系をBakerが文献3)で議論していること，Wilson の方法が，液晶，He，その他多くの系の相転移に広く応用されはじめたことを附記しておく。

文　献

1) Physies Today／March 17 (1972).
   真木 物性研究 18 C9 (1972).
2) K.G. Wilson and M.E. Fisher P.R.L. 28 240 (1972).
   K.G. Wilson P.R.L. 28 548 (1972).
   M.E. Fisher and P. Pfeuty, to be published
   F.J. Wegner . to be published
3) G.A. Baker P.R. B5 2622 (1972).

K.G. Wilson & M.E. Fisher 「3.99次元の臨界指数」 P.R.L. 28 240 (論文紹介)

東大教養基礎科　氷 上　忍

Wilsonの renormalization group の方法で得られた recursion formula を $\varepsilon = d - 4$ (dは次元数)というパラメータで展開して臨界指数を求める。

氷上　忍

Wilsonの方法ではblock Spinを$S_\ell(\vec{X})$とすると，effective Hamiltonianが

Landau－Ginsbergの形の

$$\mathscr{H}_\ell=-\int\left[\frac{1}{2}\nabla S_\ell(\vec{x})\cdot\nabla S_\ell(\vec{x})+Q_\ell(S_\ell(\vec{x}))\right]d\vec{x}$$

に書けて，Q_ℓのrecursion formulaとして，

$$I_\ell(z)=\int_{-\infty}^{\infty}dy\exp\left[-y^2-\frac{1}{2}Q_\ell(y+z)-\frac{1}{2}Q_\ell(-y+z)\right]$$

$$Q_{\ell+1}(y)=-2^d\ln\left[I_\ell(2^{1-d/2}y)/I_\ell(0)\right]$$

が得られた。

考える系の次元数を4次元に近いとして，$d=4-\varepsilon$とし，初期条件としてr_0，u_0をεのorderにとる。recursion formulaにより

$$Q_1(y)=-2^d\ln\left[e^{-r_0z^2-u_0z^4}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{-(1+r_0+6z^2u_0)y^2-u_\ell y^4}\Big/\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(1+r_0)y^2-u_\ell y^4}dy\right]$$

$$=-2^d(-r_0z^2-u_0z^4)\cdot\ln\left\langle e^{-6z^2u_0y^2}\right\rangle\quad,\ z=2^{1-d/2}y$$

したがって$Q_1(y)=r_1y^2+u_1y^4+O(\varepsilon^3)$の形をしていることがわかる。一般に$\varepsilon^2$の範囲内では$Q_\ell(y)=r_\ell y^2+u_\ell y^4$とおいてよいことになる。この形を使うと，

$$Q_{\ell+1}(y)=-2^d\left[(-r_\ell z^2-u_\ell z^4)+\left(-\frac{3u_\ell z^2}{(1+r_\ell)}+\frac{9u_\ell^2z^2}{(1+r_\ell)^3}+\frac{9u_\ell^2z^4}{(1+r_\ell)^2}+\cdots\right)\right]$$

$$=4y^2r_\ell+2^{4-d}u_\ell y^4+\frac{3u_\ell}{1+r_\ell}4y^2-\frac{9u_\ell^2}{(1+r_\ell)^3}4y^2-\frac{9u_\ell^2 2^{4-d}}{(1+r_\ell)^3}y^4$$

$Q_{\ell+1}(y)=r_{\ell+1}y^2+u_{\ell+1}y^4$だから，$y^2$，$y^4$の係数を比較すると，

$$r_{\ell+1}=4\left(r_\ell+\frac{3u_\ell}{(1+r_\ell)}-\frac{9u_\ell^2}{(1+r_\ell)^3}\right)$$

$$u_{\ell+1}=(1+\varepsilon\ln 2)u_\ell-9u_\ell^2$$

の ε^2 までの recursion formula が得られる。この fixed point は $u_{\ell+1}=u_\ell=u$，$r_{\ell+1}=r_\ell=r\ (\ell\to\infty)$ と置いて，$u=\dfrac{\ell n\,2}{9}\varepsilon$，$r=-\dfrac{4\,\ell n\,2}{9}\varepsilon$ と求まる。

$$Q_\ell(y)\simeq Q_c(y)+(r_0-r_c)\,\lambda^\ell R_c(y)$$

$2\nu=\gamma=\dfrac{2\,\ell n\,2}{\ell n\ \lambda}$ で臨界指数が求まるから，

$\triangle r_\ell=A\lambda^\ell$，$\triangle u_\ell=B\lambda^\ell$ とおくと，recursion formula の式より

$$\lambda\binom{A}{B}=\begin{pmatrix}4-12u & 12\\ 0 & 1+\varepsilon\,\ell n\,2-18u\end{pmatrix}\binom{A}{B}$$

physical な解として $\lambda=4-12u$ を得る。

したがって $\gamma=\dfrac{2\,\ell n 2}{\ell n\,(4-12u)}\simeq 1+\dfrac{\varepsilon}{6}$

以上は Ising model の場合だが，Baxter model に相当するスピンの2成分系を考えると，

$$Q_0(y)=r_0\,(y_1^{\,2}+y_2^{\,2})+u_0\,(y_1^{\,4}+y_2^{\,4})+g_0\,(y_1^{\,2}\,y_2^{\,2})$$

前と同様な計算で recursion formula は

$$r_{\ell+1}=4\left[\,r_\ell+\left(3u_\ell+\frac{g_\ell}{2}\right)/(1+r_\ell)+\cdots\cdots\,\right]$$

$$u_{\ell+1}=(1+\varepsilon\,\ell n\,2)\,u_\ell-9\,u_\ell^{\,2}-\frac{g_\ell^{\,2}}{4}$$

$$g_{\ell+1}=(1+\varepsilon\,\ell n\,2)\,g_\ell-6\,u_\ell\,g_\ell-2\,g_\ell^{\,2}$$

となる。

この連立方程式の解（$\ell\to\infty$）は，

i）$u=g=0$　（Gaussian）

ii）$g=0$，$u=\dfrac{1}{9}\,\varepsilon\,\ell n\,2$　（Ising－like）

iii）$g\neq 0$，$g=\dfrac{\varepsilon\,\ell n\,2}{3}=6u$　（Ising－like）

$g=\dfrac{\varepsilon\,\ell n\,2}{5}=2u$　（X－Y－like）

初期値が $g_0 = 0$， $g_0 = 6u_0$ のときは独立な２つの Ising 系に等価だから， Ising like な臨界指数が得られ， $0 < g_0 < 6u_0$ のときは， X－Y like な解が安定な解となる。２次元の Baxter model と異なって今の場合（ $d = 4 - \varepsilon$ ）には臨界指数は連続的変化を示さない。

臨界指数の Feynmman－Graph 展開について

東大物理　五 十 嵐 儀 孝

§０ Introduction

臨界指数を物理量の転移点での異常性からではなく，直接的に摂動展開や Recursion 公式により求める方法が進歩しつつある。ここでは特に K．G．Wilson[1)] による次元数展開に関し，その方法と Renormalization－Group との関係について述べる。 $d > 4$ で分子場近似が正しいとの予想から， $\varepsilon = 4 - d$ を微少量として，臨界指数を ε 展開し， $d \leqq 4$ での値を求める画期的方法であるが，多くの摂動展開と同様 Asymptotic 展開になっている。

§１ Free energy－Hamiltonian

$$H/kT = \int \left\{ \frac{1}{2} r_0 s^2(x) + \frac{1}{2} \left[\nabla s(x) - \nabla\nabla^2 s(x) \right]^2 + u_0 s^4(x) \right\} d^d x \tag{1}$$

u_0 の項が分子場からのずれを表わしていると考えて， Graph では u_0 で展開する。また $\nabla\nabla^2 s$ の項は $k \gg 1$ の発散をとめるために付けたものであり，場合によっては cut off をする事で除ける。

$s^2 = \Sigma s^\alpha s^\alpha$ では $1 \leqq \alpha \leqq n$ で， n は内部自由度を示し， Ising（ $n=1$ ），X－Y，Helium（ $n=2$ ），Heisenberg（ $n=3$ ），spherical（ $n=\infty$ ）に対応する。内部対称性は $s^2 = s^\alpha s^\alpha$，$s^4 = (s^2)^2$ により決定される。また異方性は $s^2 = \Sigma J_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta$ とすれば考慮できる。