Wilsonの論文IIの紹介　Phys. Rev. B4 (1971) 3184

東大物性研　山﨑義武

Wilsonの臨界現象に関する一連の研究内容，評価，解説などが既に文献1）などに簡素にまとめられておりますが義務ゆえに簡単に内容を紹介します。

Wilsonは論文I（前論文）でKadanoff−Widomの scaling 則をくりこみ群に結びつけて，固定点理論を展開し，論文IIで一般化されたIsing スピン系を例に採って，どのような方法でくりこみ群のLie方程式を導びくか，固定点理論を用いて臨界現象を表わす指数をどのように求めるか，簡単なmodelでの粗い近似計算で η，γ，ν がどんな値で得られたか，Wilsonの方法の問題点，などを論じている。但し，外部磁場のある場合，転移点より低い温度領域，或は，二次元の場合などは考慮外においてる。

〔一般化されたIsingスピン系の分配関数〕

$$Z(K, h : r, \lambda) = \Pi_{\vec{n}} \int_{-\infty}^{\infty} dS_{\vec{n}} \exp\left[-r\Sigma_{\vec{n}} S_{\vec{n}}^2 - \lambda\Sigma_{\vec{n}} S_{\vec{n}}^4 + K\Sigma_{\vec{n}}\Sigma_{i=1}^{\alpha} S_{\vec{n}} S_{\vec{n}+i} + h\Sigma_{\vec{n}} S_{\vec{n}} \right] \qquad (1)$$

$$K = -J/kT \ , \quad h = -\mu H/kT$$

格子点 $\vec{n}$ のスピン $S_{\vec{n}}$ を連続変数とみなし，最隣接格子点間でのみJで相互作用している系に，ある極限でGaussモデルに移行し，別の極限でGaussモデルからのずれの効果が考慮できるように，温度T，磁場Hに独立なパラメタ r，λ が導入されている。

〔積分変数の導入〕

系の熱力学量を求めることは(1)式の integrand を直交化できる積分変数をみつけることに帰する。(1)式で λ とKがともにゼロでないとき純粋な運動量或は位置空間（m-s or r-s）で integrand を factorize できない。そこで運動量と位置の混合空間表示を用いて

“異なる自由度間の結合項”≪“1自由度だけを含む項”　(2)

を満たす変数変換を導入して近似的に integrand を factorize する。

Fermi 統計の Layman 表示にヒントを得て，位相空間（p-s）の単位体積の各セルに minimal wave packet を対応づけ，

a）任意の異なる wave packet は p-s のセルが重なっていなければ直交性

b）セルが p-s のすべてをみたしていれば一組の wave packet は完全性

を備えていることが云える。〔波動関数にテイルをもたせていないのは定性的な議論のためで古典的描像になっている〕

相転移の性質は波数 k がゼロのところの性質によって決まり，m-s と r-s の体積の積が単位体積であることを考慮して p-s を

$$\left.\begin{array}{ll} \text{運動量空間は} & 2^{-\ell} \leqq |\vec{k}| \leqq 2\times 2^{-\ell} \quad (\, 2 < |\vec{k}| \leqq \pi \quad \text{negl.}\,) \\ \text{位置空間は} & 2^{\ell-1} \leqq |\vec{X}| \leqq 2^{\ell} \end{array}\right\} \ell=0,1,\cdots,\infty \qquad (3)$$

で分ける。〔m-s と r-s を独立に考えているのは古典的描像による。〕p-s を分割する長さの比は $2^{\pm 1}$ に限定する必要はなく（2)式がなりたつ範囲で自由に選べる。以上の変数表示に移すと，（1)式の λ の項は，r-sでは同じセルの m-sで異なるセル間の相互作用を又，Kの項は逆に，m-sでは同じセルの r-sで異なるセルの間の相互作用を意味する。連続変数 $\vec{X}$ に依存するスピン変数 $S(\vec{X})$ は，完全直交規格化された波動関数のセット $\{\psi_{\vec{m}l}(\vec{X})\}$ により次のように書ける：

$$S(\vec{X}) = \Sigma_{\vec{m}}\, \Sigma_{\ell=0}^{\infty}\, \psi_{\vec{m}e}(\vec{X})\, S_{\vec{m}l} \, . \qquad (4)$$

波動関数 $\psi_{\vec{m}l}(\vec{X})$ の Fourier 変換形を $\phi_{\vec{m}l}(\vec{k})$ で書き，$\phi_{\vec{m}l}(0)=0$ を考慮して

$$\psi_{\vec{m}l}(\vec{X}) = \begin{cases} 2^{-\ell d/2}\, w^{-1/2} & \text{セル}\,\vec{m}\,\text{の内の}\tfrac{1}{2}\text{の体積で} \\ -2^{-\ell d/2}\, w^{-1/2} & \text{セル}\,\vec{m}\,\text{の内の残りの体積で} \\ 0 & \text{セル}\,\vec{m}\,\text{の外} \end{cases}$$

$$\phi_{\vec{m}l}(\vec{k}) = \begin{cases} 2^{\ell d/2}\, w^{-1/2} & \text{セル}\,\vec{m}\,\text{の内} \\ 0 & \text{セル}\,\vec{m}\,\text{の外} \end{cases} \qquad (5)$$

（wは規格化定数）を仮定する。更に，任意の $\vec{m}$，ℓ をもって2つのセルはスケイル変換に対して次の平進対称性

$$\psi_{\vec{m}e}(\vec{X}) = 2^{-\ell d/2}\, \psi_{00}(\, 2^{-\ell}\vec{X} - \vec{m}\, w^{-1/d}\,)$$

で結ばれると仮定する。これらの近似のもとで，系の Hamiltonian は

$$\mathscr{H}_0 = -\int_{\vec{X}} P[S(\vec{X})] - \frac{1}{2}K\int_{\vec{X}} \nabla S(\vec{X})\cdot\nabla S(\vec{X}) \ ,$$
$$P(s) = (r - Kd)s^2 + \lambda s^4 \qquad (6)$$

と書ける。

$\ell = 0$ のセルについて積分した後も(4)，(6)式が原形を再現しているようにスピン変数変換

$$S'_{\vec{m}\,\ell-1} = \alpha^{-1} S_{\vec{m}\,\ell} \qquad (\alpha:\ \text{定数}) \qquad (7)$$

を行い次の記号

$$y_{\vec{m}} = (K\rho_0/2)^{1/2} S_{\vec{m}\,0} \ , \quad \rho_0 = \int_{\vec{X}} [\nabla\psi_{\vec{m}\,0}(\vec{X})]^2 \ ,$$

$$Q(y) = w^{-1} P[(K\rho_0)^{-1/2}(2w)^{1/2} y] \ ,$$
$$(8)$$
$$z_{\vec{m}} = (K\rho_0)^{1/2}(2w)^{-1/2} 2^{-d/2} \alpha s'(m w^{-1/d}/2) \ ,$$

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-y^2 - \frac{1}{2}Q(z-y) - \frac{1}{2}(z+y)]$$

を導入する。更に，$\ell = 1, 2, \cdots, \ell$ のセルについて順次積分すれば次の関係式

$$Q_{\ell+1}(y) = -2^d \{ \ln I_\ell [2^{-d/2}\alpha_\ell (K_\ell/K_{\ell+1})^{1/2} y] - \ln I_\ell(0) \} \ ,$$

$$I_\ell(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-y^2 - \frac{1}{2}Q_\ell(z+y) - \frac{1}{2}Q_\ell(z-y)] \ , \qquad (9)$$

$$K_{\ell+1} = K_\ell \alpha_\ell^2 / 4$$

が成立し，系の Hamiltonian と自由エネルギ F は(9)式と

$$P_{\ell+1}(s) = -2^d w \{ \ln I_\ell [K_\ell \rho_0/2w)^{1/2} 2^{-d/2} \alpha_\ell s] - \ln I(0) \} \qquad (10)$$

を用いて

$$\mathcal{H}_{\ell+1} = -\int_{\vec{X}} P_{\ell+1}\left[s'(\vec{X}) \right] - (K_{\ell+1}/2) \int_{\vec{X}} \left[\nabla s'(\vec{X}) \right]^2 \tag{11}$$

$$F = w \Sigma_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell d} \left[-\frac{1}{2} \ln(K_\ell \rho_0 / 2) + \ln I_\ell(0) + 2^{-d}(1-2^{-d})^{-1} \ln \alpha_\ell \right] \tag{12}$$

で表わされる。(9)式を $\ell=0$，1，2，‥‥，∞まで繰返し計算して(12)式を用いると系の自由エネルギが得られる。

〔くりこみ群の微分方程式との関係〕

前節で得られた反復式(9)のくりこみ群との関係を調べる目的で元のスピン変数 $S_{\vec{m}\ell_1}$ に次の変換

$$S_\ell(\vec{X}) = \Sigma_{\vec{m}} \Sigma_{\ell_1=\ell}^{\infty} \psi_{\vec{m}\ell_1}(\vec{X}) S_{\vec{m}\ell_1} \tag{13}$$

を行う。これに(7)式を繰返し用いると

$$S_\ell(\vec{X}) = 2^{-\ell d/2} (\Pi_{\ell=0}^{\ell-1} \alpha_\ell) S_{c\ell}(2^{-\ell}\vec{X}) \tag{14}$$

で"scaled fieled variable" $S_{c\ell}(\vec{X})$ が定義出来る。$S_{c\ell}(\vec{X})$を用いて，$\ell=0$，1，‥‥，$\ell-1$ のセルについて積分を終了した有効Hamiltonianは

$$\mathcal{H}_\ell = -\int_{\vec{X}} P_\ell\left[S_{c\ell}(\vec{X}) \right] - (K_\ell/2) \int_{\vec{X}} \left[\ S_{c\ell}(\vec{X}) \right]^2 \tag{15}$$

で表わされ，$P_\ell(s)$は

$$P_\ell(s) = w Q_\ell \left[(K_\ell \rho_0 / 2w)^{1/2} S \right] \tag{16}$$

で与えられる。論文Ⅰとの対応関係を調べると $\mathcal{H}_\ell$ と $S_\ell(\vec{X})$はブロックの大きさ $L=2^l$ の有効Hamiltonianとブロック・スピン変数に夫々対応する。α_ℓ はⅠでの"scale factor"に類似のもので，反復式(9)は無数の"irrelevant parameters"をもつくりこみ群の微分方程式に対応する。固定点理論に従うと $T=T_c$ で反復式の解は，ℓ に無関係に $P_\ell(s)=P_c(s)$，$K_\ell=K_c$ for all ℓ が成立つ。以下では $\alpha_\ell=2$ 即ち $K_\ell=K$ (定数)に選び，$S_{c\ell}(\vec{X})$ の大きさは可変で，固定点で ℓ に無関係に定まると考える。スピン・スピン相関関数 $g(k)$ は転移点で

$$g(\vec{k}) \sim 2^{2\ell} \sim k^{-2} \tag{17}$$

即ち，$\eta=0$ の結果が得られる。

〔臨界指数との関係〕

臨界指数は反復式(9)を電子計算機を用いて数値解析することが出来るが，転移点近傍で $Q_\ell(z)-Q_c(z)$ が小さいことを仮定して次のように形型化する：

$$Q_{\ell+1}(z)-Q_c(z) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} T(z,y)\left[Q_\ell(y)-Q_c(y)\right]dy. \tag{18}$$

(9)式と $x=2\times 2^{-d/2}z$ を用いると

$$T(z,y)=2^d\left\{\exp\left[-(y-x)^2-\frac{1}{2}Q_c(y)-\frac{1}{2}Q_c(2x-y)\right]/I_c(x)\right.$$
$$\left.-\exp\left[-y^2-\frac{1}{2}Q_c(y)-\frac{1}{2}Q_c(-y)\right]/I_c(0)\right\}. \tag{19}$$

線型反復式(18)は，温度と磁場の変化に対して指数関数的に増大する不安定性を含んでいるので，それらの解は次の形

$$Q_\ell(z)-Q_c(z)=2^{\ell w_k}g(z) \qquad w_k=y_k \text{ or } x_k \tag{20}$$

（温度 or 磁場の不安定性に対して）

に表わせる。$g(z)$ は(19)式のTの固有関数で，温度と磁場の不安定性に対しては，対称性から，z について，夫々，偶，奇な関数である。後者の場合，$x_k=\frac{d}{2}+1$ が得られ，前者の場合，ℓ の非常に大きい値のときと，ℓ の中間領域での漸近形から帯磁率 χ は，$\epsilon=K_c-K$ と $\chi\sim\epsilon^{-2/y_k}\sim\epsilon^{-\gamma}$ の依存関係で結ばれ，$\gamma\sim 2/y_k$ が得られる。又，相関距離 ξ は $\xi\sim\epsilon^{-1/y_k}\sim\epsilon^{-\nu}$ 即ち $\nu\sim 1/y_k$ で与えられ，$\eta=0$ である。

Gaussモデルで解析的に，$y_k=2$，$\gamma=1$，$\nu=0.5$ が得られ，(1)式の λ の項をGauss モデルからの小さなずれとみなして摂動法を使って同様な議論を行っているが，更に詳しい議論が文献2)に展開されているのでそれらに譲る。

〔問　題　点〕

Wilsonは問題点として次の6点

(i) 外部磁場のかゝっている系の取扱い方法？

(ii)　ξがゼロでない値を正確に得る方法？

(iii)　2次元系を正確に扱いうる方法？

(iv)　$T < T_c$ の低温側を議論できる方法？

(v)　Widom－Kadanoff　のスケィリング則が上述の定性的な解析に対して成立つかどうか？

(vi)　r-s，m-s を $2^{\pm 1}$ の比で区分したが，“2”？にまつわる問題。

を指摘したが，既に，文献2）によって解決されたところもある。

最後に，Wilsonによって導びかれた反復式が正確に成立つ系をBakerが文献3）で議論していること，Wilson の方法が，液晶，He，その他多くの系の相転移に広く応用されはじめたことを附記しておく。

文　　献

1）Physies Today／March　17（1972）.
　真木　物性研究 18 C9（1972）.

2）K.G. Wilson and M.E. Fisher P.R.L. 28 240（1972）.
　K.G. Wilson P.R.L. 28 548（1972）.
　M.E. Fisher and P. Pfeuty，to be published
　F.J. Wegner．to be published

3）G.A. Baker P.R. B5 2622（1972）.

K. G. Wilson & M.E. Fisher 「3.99次元の臨界指数」 P.R.L. 28 240 （論文紹介）

東大教養基礎科　氷 上　忍

Wilsonの renormalization group の方法で得られた recursion formula を $\varepsilon = d - 4$（dは次元数）というパラメータで展開して臨界指数を求める。