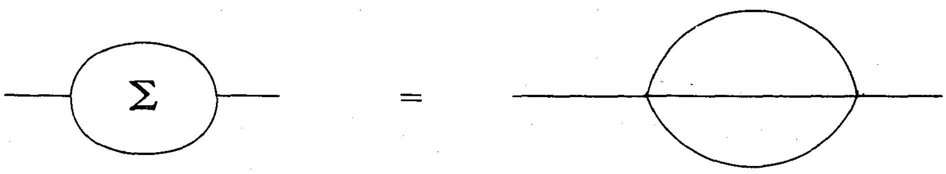
Polyakov によるユニタリティー形成

日本電気株式会社　中央研究所

松　野　孝　一　郎

相転移点近傍での励起スペクトルを求める際，支配的となる集団励起の周波数，即ち，エネルギーは限りなく小さくなる。いかなる相互作用もその相互作用エネルギーが0でなく有限である限り，その励起に対しては強い相互作用となる。よってこの様な低エネルギー極限では，考察している系のハミルトニアンに対しいかなる意味でも“小さな”展開パラメータは存在しないことになる。この様な系のスペクトルを求める一方法として，Patashinskii と Pokrovskii は一つのブートストラップ機構を提案した。[1] 存在している励起は互いに強く相互作用しているが，求めるべき励起のスペクトルは励起間の強い相互作用を受けても不変であるという機構である。励起間の強い相互作用によって不変になる様に励起スペクトルが決定されていると主張している。相互作用としては二体の励起の散乱まで考察し，その散乱相互作用に対して不変な励起はそのプロパゲーター$\longrightarrow$について次のブートストラップ方程式を満足していると提案している。



(1)

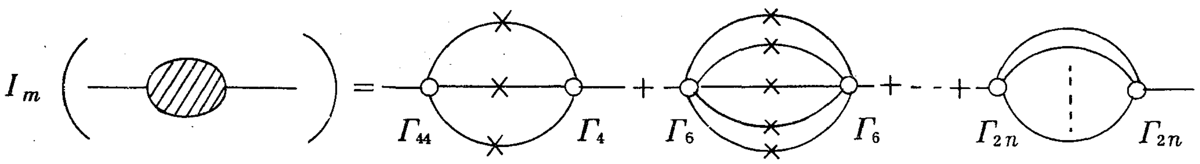
ここで左辺は励起の自己エネルギーである。

与えられたブートストラップ機構は確かに励起自体が互いに強く散乱相互作用をしていることを考慮に入れているが，相転移点近傍での励起の特性を十分にとらえているものとは言いがたい。求めるべき励起の基本的特性の一つは励起同志が位相のそろった状態で強く相互作用しているという点である。これが転移点での相関距離の発散に反影している。二体の散乱のみを特にとりあげる範囲内では二ケ以上の励起の位相がそろうという特性を記述するのに十分なものでない。この議論は Patashinskii & Pokrovskii の提案したブートストラップ機構の物理的側面に対する批判であるが，Polyakov はより形式的な立場から批判を行っている。[2]

松野孝一郎

励起についてのブートストラップ機構（１）は励起の自己エネルギーの摂動展開のある一項のみを強調していることになっている。摂動展開の収束を保護する小さなパラメータは存在していないから，原則としては全ての項を考えなければいけない。摂動展開においてある有限個の項のみを考えて有意であるのは無摂動項に比して摂動項が十分に小さい時である。換言すれば，有限個の摂動項のみを考察することは遷移確率の総和が１ではなく１からずれていることを示している。遷移確率を保存しないことになる。摂動展開に小さなパラメータがある場合に限り，有限個の摂動項を考えても遷移確率の非保存の程度は１より十分小さくなり，摂動そのものが有意となる。一方ブートストラップ機構（１）は強く相互作用している系の励起スペクトルを求めるために導入され，かつ摂動項としては一項のみを考えている。強く相互作用している系での摂動展開では遷移確率の保存は大きく破られてしまう。強く相互作用をしていることを認めながらも遷移確率の非保存という非物理的な結果をもたらしてしまう．この自己矛盾を解決するために Polyakov は，どの様な相互作用系でも遷移確率は保存されなければいけないということを要請した。即ち，ユニタリティーである。

相転移点近傍での励起に対するユニタリティーは次の様に示される。



（2）

左辺は求めるべき励起の自己エネルギーの虚数部である。これは励起のプロパゲータＤの逆数の虚数部 $\mathrm{Im}(D^{-1})$ に等しい。Γ_{2n} は n ケの励起の相互作用核である。ユニタリティーの式（2）は遷移確率が保存されることを恒等的に表現したものになっている。励起のプロパゲータＤの虚数部ＩｍＤが判明したならば，プロパゲータＤは分散公式

$$D(k^2) = \int \frac{\mathrm{Im}\,D(z)}{z-k^2}\,dz \tag{3}$$

によって求められる。但し，ユニタリティーの式（2）より明かな様にこの分散公式は一種のブートストラップ方程式になっていることがわかる。

励起のスペクトルを求めることはプロパゲータＤの形を決めることと同等である。ブートストラップ方程式（3）の解は一般に次の様に与えられることが示される。

$$D(k^2) = \widetilde{D}(k^2) + \sum_n \frac{C_n}{k^2 - k_n^2} \tag{4}$$

ここで$\widetilde{D}(k^2)$は(3)を満足しており，極を与える第二項のk_n，C_nは不定である。k_n，C_nを決めることは出来ず，不定のまま解として存在することになる。これはCDD－極と称されているものである。[3] よってユニタリティーの式だけからではCDD－極の存在が不可避となり励起のスペクトルを一意に定めることが不可能となる。

一意にスペクトルを決定するためには，本質的に恒等式であるユニタリティーの他に，目下考察している励起に固有な特性を附加し，その補助条件のもとでこのユニタリティーの式を解かなければいけない。その方向への試みの一つはスケーリングを仮定することである。プロパゲータ$D(k^2)$を静的な相関のプロパゲータと見なす時は，Dは波数kと相関距離ξの同次関数

$$D(k^2) = k^x f(k\xi)$$

であると示される。この補助条件により，より具体的なプロパゲータの形，及び励起間の相互作用の振舞いが明確にされる。

ユニタリティーの式(2)において右辺の項数は無限である。励起間相互作用は本質的に強い相互作用であるため，いずれの項が支配的であるかを断定することは困難である。仮にある項が支配的であるとするならばそれの理由づけを行わなければいけないが，そのためには寄与の大小を測定するある無次元の量Wを導入しなければいけない。もしnケの励起が関与する項(Γ_{2n}を含む項)が支配的であるならば，無次元量W_nについて$|W_l / W_n| < 1$ ($l \neq n$)が常に成立することになる。 この場合には$|W_l / W_n|$を展開パラメータにして摂動計算が可能になることになる。一方相転移点近傍の励起には相互作用に関して小さなパラメータが存在しないことが既に認められている。よって形式的には，ユニタリティーの展開項においていずれかの項が支配的であるという場合はあり得ない。換言すれば，ユニタリティーの展開項の各項が同程度の寄与を与えることを消極的ではあるが認めることになる。この立場に立つことにより，相互作用の核Γ_{2n}の概略値を求めることを可能にし，種々の相関関数の算出を可能とする。

ユニタリティーは恒等式であるため常に満足されなければいけない。強く相互作用している系でのスペクトルを求める場合には摂動論が用いられないため，このユニタリティーがその基盤となるべきものである。しかしユニタリティーだけに依存するならば，CDD－極で示される様な不定さを取りのぞくことは出来ない。ユニタリティーとは矛盾しなく

かつ励起の物理的特性を反影した補助条件を導入することによりその不定さを除去することが期待される。スケーリング仮説はその一例である。Migdal による相互作用のポテンシャルを仮定する方法，Wilson による波動関数の相似性を仮定する方法などが最近試みられているものである。

参　考　文　献

1. A. Z. Patashinskii and V. L. Pokrovskii , Soviet Phys. JETP 19, 677 (1964).
2. A. M. Polyakov , Soviet Phys. JETP 28, 533 (1969), 30, 151 (1970).
3. L. Castillejis , R. Dalitz , and F. Dyson , Phys. Rev. 101, 543 (1956).

Wilson の論文 I の紹介　Phys. Rev. B4 (1971), 3174

福岡大理　伊　佐　士　郎

Kadanoff の scaling theory の考え方を微分方程式の形で表わす。そして，この方程式の大局的振舞いと相転移の関係を論ずる。但し，具体的な計算は行なわない。

Kadanoff の scaling theory

d 次元立方格子の Ising ferromagnet を考える。この分配函数は，$K=-J/kT$，$h=H/kT$ として，

$$Z(K,h)=\sum_{\{s\}}\exp\left(K\sum_{\vec{n}}\sum_{\vec{i}}S_{\vec{n}}\cdot S_{\vec{n}+\vec{i}}+h\sum_{\vec{n}}S_{\vec{n}}\right)。\qquad(1)$$

今，この格子を $L\times L\times\cdots\cdots\times L$ $(1\ll L\ll\xi)$ の block に分け，各 block の状態が effective spin で表わされ，effective spin 間の相互作用は Ising 型であると仮定する。block 系に対する K，h をそれぞれ K_L，h_L とすると，自由エネルギーの singular 部分及び相関距離は