〔方 法 論 と そ の 検 討〕

相転移理論に於けるくりこみ群の方法

東北大，理　　真 木 和 美

§1　序

Wilson の最近の一連の仕事[1)〜3)]をきっかけとして，相転移理論は新らしい夏を迎えた感がある。Wilson 以前にも相転移をいろいろ場の理論での技法を活用して取扱おうという試みは Migdal[4,5)] Polyakov[6,7)] 等によって行なわれていたが，Wilson は場の理論に於けるくりこみ群の方法を full に用いて理論を展開している。ここでは量子電気力学に於けるくりこみ群の方法を紹介して，実際種々の相転移のモデルでは同種の群が存在すること，この群と相転移理論での universality（普遍性）の概念とどのように結びつくかを考察し，最後には簡単な Migdal の仕事[4,5)]の紹介で終る。

§2　量子電気力学に於けるくりこみ理論

量子電気力学に於ける種々の発散の困難が，これらの無限量を荷電及び質量にくりこむことによって，形式的には有限量のみを含む理論に書き直せることはよく知られている。しかし摂動の各次数で次々に現われてくる発散がすべて荷電及び質量にくりこまれることはくりこみ群の方法を用いれば最も簡単に示すことができる。このくりこみ群の概念は既に Gell－Mamn，Low[8)]及び Landau et al[9)]による量子電気力学の紫外領域の考察の中に形成されて来たが，これをもっと一般的な観点から Bogoliubov，Shirkov[10)]の教科書に非常に要領よくまとめられている。

先ず電子，光子系についてのラグランジャンを考えよう。

$$L=-\int\left[\,\overline{\Psi}(\hat{\hat{\partial}}+m)\psi+\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)+ie\overline{\psi}\hat{A}\psi\,\right]d^3x \qquad (1)$$

こゝで $\hat{\partial}=\gamma_\mu\partial^\mu$，$\hat{A}=\gamma_\mu A^\mu$，$\psi$，$A_\mu$ は電子及び電磁波の場の演算子である。上のラグ

ランジァンから自由な電子及び光子のグリーン関数，及び vertex はそれぞれ

$$g_0(p)=-\frac{1}{i\hat{p}+m}\ ,\ D_0(k)=\delta_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}\ ,\quad \Gamma_{0\mu}=\gamma_\mu \tag{2}$$

で与えられる。さて今新らしいラグランジァン

$$L'=-\int\left[z_2\bar{\psi}(\hat{\partial}+m)\psi+\frac{z_3}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)+iez_1\bar{\psi}\hat{A}\psi\right]d^3x \tag{3}$$

で書かれる系を考えてみよう。この系の自由な電子，光子のグリーン関数及び vertex は

$$g_0{}'(p)=-\frac{1}{z_2}\frac{1}{i\hat{p}+m}=\frac{1}{z_2}g_0(p)\ ,$$

$$\Gamma_{0\mu}{}'=z_1\gamma_\mu=z_1\Gamma_{0\mu}$$

$$D_0{}'(k)=\frac{\delta_{\mu\nu}}{z_3k^2}=\frac{1}{z_3}D_0(k)\ , \tag{4}$$

で与えられる。今上の変換と同時に荷電についての変換

$$e'^2=z_1{}^2z_2{}^{-2}z_3e^2 \tag{5}$$

を行なってやると，摂動論の範囲では上の関係(4)は相互作用を取り入れたグリーン関数にまで拡張されて，

$$g'(p)=\frac{1}{z_2}g(p)\ ,$$

$$\Gamma'=z_1\Gamma$$

$$D'(k)=\frac{1}{z_3}D(k)\ , \tag{6}$$

が成立する。上の関係は摂動論の各ダイアグラムについて成立していることが容易にわかる。特に量子電気力学の問題では Word identity から

$$z_1=z_2 \tag{7}$$

が普通要請されるので，この時には(5)は $e'^2=z_3e^2$ となる。上のように二つのラグランジァンに対して，数係数を除いてグリーン関数及び vertex が同等になるということは，いづれのラグランジァンから出発しても同じ物理的結論が得られるということで，これは理論が(z_1 , z_3) の対の連続変数の変換で構成する乗群に対して不変になっていることを意味する。この群をくりこみ群と云う。このくりこみ群に対してのある物理量の不変性あるいは共変性を用いるとどのような結果が得られるかを次の例題で見よう。

今荷電くりこみについて考えてみる。今電子ー光子系を二つのラグランジァン L_1 ，L_2 で表わした時，系の光子グリーン関数及び荷電については次の関係のあったことを思いおこそう。

$$D_2 = z_3 D_1 \qquad e_2{}^2 = z_3{}^{-1} e_1{}^2 \tag{8}$$

さらに　$D_1 = d_1 / k^2$ ，$D_2 = d_2 / k^2$ とおくと，上の関係は

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_2{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_2{}^2\right) = z_3\, d\left(\frac{k^2}{\lambda_1{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_1{}^2}, e_1^2\right) \tag{9}$$

で λ_1 及び λ_2 は L_1 及び L_2 に対応する系の切断運動量とする。今dを

$d\left(1, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_1^2\right) = 1$ と規格化すると，（9）より

$$z_3 = d\left(\frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_2{}^2\right) \tag{10}$$

これを（9），及び（8）に代入すると，

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_1{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_1{}^2\right) = d\left(\frac{k^2}{\lambda_2{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_2{}^2\right) \Big/ d\left(\frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_2{}^2\right) \tag{11}$$

$$e_1{}^2 = e_2{}^2\, d\left(\frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2{}^2}, \frac{m^2}{\lambda_2{}^2}, e_2{}^2\right) \tag{12}$$

が得られる。新らしい変数

$$\frac{k^2}{\lambda_2{}^2} = x \ , \frac{m^2}{\lambda_2{}^2} = y \ , \frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2{}^2} = t \tag{13}$$

を導入すると（11），（12）は

$$e^2\, d(x, y, e^2) = e^2\, d(t, y, e^2)\, d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2\, d(t, y, e^2)\right) \tag{14}$$

のように書ける。今 $e_2{}^2 = e^2$ とおいた。$e^2\, d(x, y, e^2)$ は z_3 による変換で不変なので，これを不変荷電と呼ぶ。さて今（14）の両辺を x で微分して後 t＝xとおくと，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^2\, d(x, y, e^2)\right) = e^2\, \frac{d(x, y, e^2)}{x}\, \varphi\left(\frac{y}{x}, e^2\, d(x, y, e^2)\right) \tag{15}$$

$$\varphi(y, e^2) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} d(\xi, y, e^2)\right]_{\xi=1} \tag{16}$$

が得られる。(15)，(16)はくりこみ群に関連したLie微分方程式である。(15)式を用いると例えばφを摂動で計算した結果から，くりこみ群に不変な結果を得ることができる。

この様子を具体的に見るのに，先ず$\varphi(y, e^2)$を摂動で計算してみよう。$D(\mathrm{k})$に対する最底次の補正は

$$\delta D(k) = D_0(k)\Pi(k)D_0(k) = k^{-4}\Pi(k) \tag{17}$$

$$\Pi(k) = \gamma_\mu \quad \gamma_\mu = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4\underline{p}\,\mathrm{T_r}\left(\gamma_\mu \frac{1}{i\hat{p}+m}\,\gamma_\mu \frac{1}{i(\hat{p}-\hat{k})+m}\right)$$

$$= \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{[4m^2+2p\cdot(p-k)]}{[p^2+m^2][(p-k)^2+m^2]} \tag{18}$$

上の積分はpの大きな時p^2のオーダーで発散する。しかし光子の質量は相互作用のある時も0なので，$\Pi(k)$は$k=0$で消えなければならない。このことを要請すると，$\Pi(k)$としてあらためて$\widetilde{\Pi}(k)=\Pi(k)-\Pi(0)$で与えられるものと考えればよい。$\widetilde{\Pi}(k)$は

$$\widetilde{\Pi}(k) = -k^2\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 du\,u(1-u)\,\ln\left|\frac{m^2+u(1-u)k^2}{m^2+u(1-u)\lambda^2}\right| \tag{19}$$

で与えられる。$\widetilde{\Pi}(k)$は$\lambda\to\infty$とともに対数的に発散する。したがって$d(x, y, e^2)$は最低次の摂動の範囲で

$$d(x, y, e^2) = 1 + e^2\left[f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right] \tag{20}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 du\,u(1-u)\ln(1+u(1-u)x) \cong -\frac{1}{12\pi^2}\left[\ln|x| - \frac{5}{3}\right] \tag{21}$$

したがってこれから$\varphi(y e^2) = e^2\left[\frac{\partial}{\partial\xi}f\left(\frac{\xi}{y}\right)\right]_{\xi=1}$ (22)

が得られる。これを(15)に代入して積分すると，

$$d^{-1}(x, y, e^2) = 1 - e^2\left[f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right] \tag{23}$$

特に

$$e^2 d(x, y, e^2) = \frac{e^2}{1-e^2\left[f\left(\frac{x}{y}\right)-f\left(\frac{1}{y}\right)\right]} \tag{24}$$

今くりこまれた荷電 e_0^2 を

$$e_0^2 = \frac{e^2}{1 + e^2 f(\frac{1}{y})} \cong \frac{e^2}{1 + \frac{e^2}{12\pi^2} (\ln y - \frac{5}{3})} \tag{25}$$

で定義すると

$$e^2 d(x, y, e^2) = \frac{e_0^2}{1 - e_0^2 f(\frac{x}{y})} \tag{26}$$

となって $e^2 d(x, y, e^2)$ は発散を含まない量で表現できる。(25)はくりこまれた荷電 e_0^2 は切断運動量 λ を大きくするとともに増大することを示し，ある極限 $\lambda = m e^{\frac{12\pi^2}{e^2}}$ で発散する。あるいは (25) を e^2 について解くと

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln|y|} \tag{27}$$

が得られる。今上の式で $\lambda \to \infty$ ($y \to 0$) にしてやると， $e^2 \sim |\ln|y||^{-1}$ となって λ とともに e^2 は小さくなる。このことは (27) の関係を用いる限り　$\lambda \to \infty$の理論では $e = 0$ でなければならないことを意味している。これは $\varphi(y, e^2)$ の計算に二次の摂動の結果を用いた為で，もっと一般には次の二つの可能性が考えられる。

a) $\varphi(y, e^2)$ が正定数値の場合，この時 d は e^2 によらず切断運動量 λ とともに単調に増大する。したがって矛盾のない理論は $e^2 = 0$ の時しかあり得ない。 $e^2 \neq 0$ では $\lambda \to \infty$の極限で e_0^2 は発散する。

b) $\varphi(y, e^2)$ が e^2 のある値 e_1^2 で零になる場合，この時 $0 < e^2 < e_1^2$ であれば λ を増大するとともに $e^2 d(x, y, e^2)$ は一定値 e_1^2 に近ずく。この時の e_1^2 はもとの e^2 の値によらない。

こゝでは，この b) の可能性が吾々の興味を持つ相転移に於ける universality (普遍性) と関連してくることに注意しておく。

§3　相転移のモデル

こゝでは相転移を記述するモデル・ハミルトニアンに於けるくりこみ群について考えてみよう。この節では特に二つのモデルについて見る。最初に Wilson[1] にならって，彼の

モデルを少し一般化したn成分ヴェクトルモデルを考える。（モデルI）

$$\frac{H}{T}=\int\left[\,|\nabla\varphi(x)|^2+r_0\,|\varphi(x)|^2+u_\nu\,|\varphi(x)|^{2\nu}\right]d^dx \tag{28}$$

こゝで $|\varphi(x)|^2=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha(x)^2$, $|\varphi(x)|^{2\nu}=\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha(x)^2\right)^\nu$ (29)

$\nu\geqq 2$ 整数

とする。

先ず上のハミトニアンに対してくりこみ群の存在を証明しよう。その為に(28)からくりこみ群で移れる新らしいハミトニアン

$$\frac{H'}{T}=z_1\int\left[\,|\nabla\varphi(x)|^2+r_0\,|\varphi(x)|^2\right]d^dx+z_\nu\,u_\nu'\int|\varphi(x)|^{2\nu}\,d^dx \tag{30}$$

を考えてみよう。それぞれのグリーン関数及び二体vertexを g , g' , Γ , Γ' とすれば，上の変換と同時に

$$u_\nu'=(z_1)^\nu z_\nu^{-1}u_\nu \tag{31}$$

の変換を行なえば

$$g'=\frac{1}{z_1}g\quad,\quad\Gamma_\nu'=z_\nu\Gamma_\nu \tag{32}$$

の関係の成立することが容易にわかる。したがって上のモデルではくりこみ群が存在することが証明できた。次節では(31)，(32)を用いて，上の系に特徴的なLie微分方程式を導びく。

次に上のハミトニアンを考察するのに便利なスケール変換に対する(28)の変換性を調べてみよう。今 $x\to sx$ の変換を行なうと(28)は

$$\frac{H(s)}{T}=s^{d-2}\int\left(\,|\nabla\varphi(x)|^2+s^2\,r_0\,|\varphi(x)|^2\right)d^dx+s^d\,u_\nu'\int|\varphi(x)|^{2\nu}\,d^dx \tag{33}$$

のようになる。この系がもとのH/Tと同等の物理的現象を予言するためには（スケーリングの要請）(31)の関係から u_ν が s とともに

$$u_\nu'(s)=\left(s^{d-2}\right)^u s^{-d}\,u_\nu=s^{d(\nu-1)-2\nu}\,u_\nu \tag{34}$$

の変換を受ければいゝことがわかる。一方今 $r_0(s)=s^2 r_0$ なので，このことから

$$u_\nu = r_0^{-\frac{d}{2}(\nu-1)+\nu} u_\nu(0) \tag{35}$$

のような r_0 依存性をもてばよいことがわかる。特に二体力の場合（ $\nu=2$ ）には（35）は

$$u_2 = r_0^{\frac{\varepsilon}{2}} u_2(0)\ ,\ \varepsilon=4-d \tag{36}$$

が得られる。このことは $\varepsilon>0$ の時には二体力は臨界点の近傍では，ゆらぎによる遮蔽をうけて，小さくなることを示し，これは classicalの挙動より離れることを意味する。他方 $\varepsilon<0$ の時には classical な記述が成立する。（ Wilson[1] ）
又くりこみ群の存在からこのモデルに関しては universality（普遍性）の成立することが結論できる。〔 b）の場合 〕 これはWilson[1] によって固定点定理と唱されているが，（28）のハミルトニアンで記述される系は $r_0 \to 0$ に接近する時， u_2 の如何によらず，一定の相互作用 Γ_ν で記述される系に移行するこの時の Γ_2 は系の次元 d 及び自由度 n のみに依存する。

上のモデルで次に三体力の場合を考えよう。（ $\nu=3$ ）。この時はスケール変換より

$$u_3 = r^{(3-d)} u_3(0) \tag{37}$$

であれば H はスケール変換に対して form invariant になる。 したがって，この場合は classical ，critical の境界点は $d=3$ になる。（後の Migdal Ⅱ §5参照）

次に同様な考察の可能なモデルとして長距離二体力をもつ系を考えよう。（モデルⅡ）

$$\frac{H}{T}=\int \left[\,|\nabla\varphi(x)|^2 + r_0|\varphi(x)|^2\right] d^dx + g\int \frac{|\varphi(x)|^2|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\sigma} d^dx\,d^dy \tag{38}$$

先ず上のハミルトニアンを

$$\frac{H'}{T} = z_1\int\left[\,|\nabla\varphi(x)|^2 + r_0|\varphi(x)|^2\right] d^dx + z_2 g'\int \frac{|\varphi(x)|^2|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\sigma} \times d^dx\,d^dy \tag{39}$$

と比較することにより，同時変換

$$g' = z_1^2 z_2^{-1} g \tag{40}$$

を行なえば H と H' は同等になることが判る。（くりこみ群の存在）。更にスケール変換 $x \to sx$ に対しては

$$\frac{H(s)}{T} = s^{d-2}\int\left[\,|\nabla\varphi(x)|^2 + s^2\, r_0\, |\varphi(x)|^2\,\right] d^d x$$

$$+ g S^{2d-\sigma}\int \frac{|\varphi(x)|^2 |\varphi(y)|^2}{|x-y|^\sigma}\, d^d x\, d^d y \tag{41}$$

これを (40) の関係と比較することにより

$$g = g_0\, r_0^{\frac{1}{2}(\sigma-4)} \tag{42}$$

であれば (38) はスケール変換に対して不変であることが結論できる。したがって今のモデルでは次元 d に無関係に $\sigma > 4$ の場合には critical の挙動を示すが，$\sigma < 4$ の時には長距離力のためゆらぎは classical になることが結論される。

§4　Lie 微分方程式

さて再び前節のモデルⅠ（特に二体力の場合）にもどってくりこみ群による共変性から導びかれるグリーン関数間の関係式を求めてみよう。二体力の場合 (30) は

$$\frac{H}{T} = \int\left[\,|\nabla\varphi(x)|^2 + r_0\, |\varphi(x)|^2\,\right] d^d x + u_0 \int |\varphi(x)|^4\, d^d x \tag{43}$$

となり，$u_0 = 0$ の場合のグリーン関数は

$$g_0(k) = \frac{1}{k^2 + r_0} \tag{44}$$

で与えられる。今相互作用のもとでくりこまれたグリーン関数を

$$g(k) = \frac{d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ \frac{r}{\lambda^2},\ u_0\right)}{k^2 + r} \tag{45}$$

と書くことにすると，(32) の関係より（今 $z_2 = 1$ の時を考える）

$$\left.\begin{aligned} d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2},\ \frac{r}{\lambda_2^2},\ u_2\right) &= z_1\, d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2},\ \frac{r}{\lambda_1^2},\ u_1\right) \\ u_2 &= z_1^{-2}\, u_1 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

の関係が得られる。更に $d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{r}{\lambda^2}, u\right)$ を

$$1 \equiv d\left(1, \frac{r}{\lambda^2}, u\right) \tag{47}$$

で規格化すると，(46)は

$$z_1 = d\left(\frac{\lambda_1^{\,2}}{\lambda_2^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_2^{\,2}}, u_1\right) \tag{48}$$

と書ける。この式を用いて(46)から z_1 及び u_1 を消去すると，

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_2^{\,2}}, u_2\right) = d\left(\frac{\lambda_1^{\,2}}{\lambda_2^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_2^{\,2}}, u_2\right) d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_1^{\,2}}, u_2\, d^2\left(\frac{\lambda_1^{\,2}}{\lambda_2^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_2^{\,2}}, u_2\right)\right) \tag{49}$$

が得られる。この式で

$$\frac{k^2}{\lambda_2^{\,2}} = x,\ \frac{r}{\lambda_2^{\,2}} = y,\ t = \frac{\lambda_1^{\,2}}{\lambda_2^{\,2}} \tag{50}$$

と新らしい変数に変換してやると，

$$d(x, y, u) = d(t, y, u)\, d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, u\, d^2(t, y, u)\right) \tag{51}$$

が得られる。この式の両辺を x で微分して後 $t = x$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\left[\ln d(x, y, u)\right] = \frac{1}{x}\phi\left(\frac{y}{x}, u\, d^2(x, y, u)\right) \tag{52}$$

$$\phi(y, u) = \left[\frac{d}{d\xi} d(\xi, y, u)\right]\Big|_{\xi=1} \tag{53}$$

この式はLie微分方程式で，例えば，$\phi(0, u)$ が求まっている時には $r=0$ での $g(k, 0) = C\,k^{\eta-2}$ とした時

$$\eta = \phi(0, u) \tag{54}$$

であることが直ちにわかる。次に $z_1 = 1$ とおく z_2 の変換のみを考えると二体 vertex Γ について

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{k_i^{\,2}}{\lambda_2^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_2^{\,2}}, u_2\right) &= z_2\, \Gamma\left(\frac{k_i^{\,2}}{\lambda_1^{\,2}}, \frac{r}{\lambda_1^{\,2}}, u_1\right) \\ u_2 &= z_2\, u_1 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

の関係が得られる。今$\Gamma(1, \frac{r}{\lambda^2}, u) \equiv 1$と規格化し，先の u_1 と u_2 の関係(46)を考慮すると(55)は

$$\Gamma\left(\frac{k_i^2}{\lambda_1^2}, \frac{r}{\lambda_1^2}, u_1\right) = d^2\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{r}{\lambda_2^2}, u_2\right)\Gamma\left(\frac{k_i^2}{\lambda_2^2}, \frac{r}{\lambda_2^2}, u_2\right) \quad (56)$$

のように書ける。今上の式で一つの運動量 k_1 に着目し，

$$\frac{k_1^2}{\lambda_2^2} = x, \quad \frac{r}{\lambda_2^2} = y, \quad \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = t \quad (57)$$

の置きかえを行なうと，

$$\Gamma(x, y, u) = d^{-2}(t, y, u)\,\Gamma\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, u\,d^2(t, y, u)\right) \quad (58)$$

が得られる。上の式から同様にして

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x, y, u) = \frac{d^{-2}(x, y, u)}{x}\psi\left(\frac{y}{x}, u\,d^2(x, y, u)\right) \quad (59)$$

$$\psi(y, u) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\Gamma(\xi, y, u)\right)\Big|_{\xi=1} \quad (60)$$

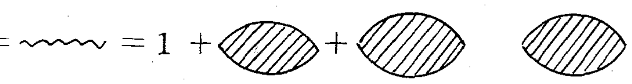
の Lie 微分方程式が得られる。この式を用いるとくりこまれた二体の vertex が計算できる。

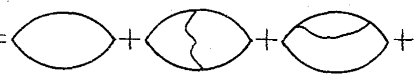
§5　Migdal の理論

以上で簡単な相転移のモデルについてのくりこみ群による帰結を眺めて来たが，このような型式化では臨界指数を決定することは，(53)，(60)で定義された$\phi(y, u)$，$\psi(y, u)$を求めることに帰着する。こゝに紹介する二つの Migdal の論文はこれらの ϕ，ψを具体的に求める一つの方法を提示したと考えてよい。

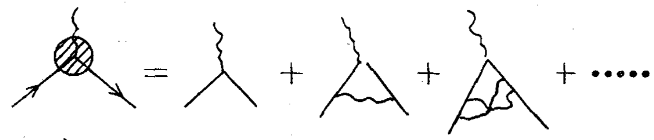
Ⅰ) キューリ点及びボーズ液体の二次相転移点近傍でのダイアグラムの方法[4)]

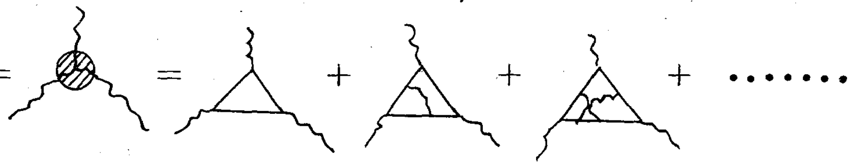
この論文では二体力で記述できる系（モデルⅠ参照）の転移点近傍〔r_0 ($\equiv \xi$, Migdal Ⅰ) $\to 0$〕でのグリーン関数をダイアグラムの方法で求め，これによって比熱の特異性を見ようというもので，計算の手法としては密度相関関数 $D(p, \xi)$ を導入する。
($\xi = \mu(T) - \mu_c$，μは化学ポテンシャル)

$D =$  $= \frac{1}{1-\Pi}$ (61)

$\Pi =$  (62)

したがって D と $\mathcal{G}$ を結びつける新らしい vertex J 及び Λ

$J(\vec{p}, \vec{q}) =$  (63)

$\Lambda(\vec{p}, \vec{q}) =$  (64)

で定義する。このように書くと，§4の(53)，(60)で定義された ϕ 及 ψ は J，Λ 及び D で表現できる。他方(63)，(64)は J，Λ に対する非線形積分方程式なので，これを解けば原理的には J，Λ 従って ϕ，ψ が求まり臨界指数が計算できる。特にくりこまれたグリーン関数Gは $k^2 = -M^2$ ($M^2 = r$) で極を持つと仮定すると，

$$G(0, \xi) = GQ_1 \xi^{-\gamma},\ M(\xi) = \kappa\, \xi^{\nu} \tag{65}$$

の臨界指数はくりこまれたJ，$J_c(\frac{p^2}{M^2})$ を用いて，

$$\gamma = J_c(0),\ \nu = \frac{1}{2} J_c(-1) \tag{66}$$

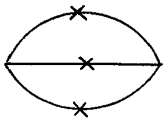
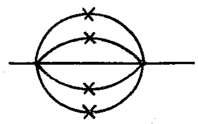
$$J_c(\frac{p^2}{M^2}) = J_c(\frac{p}{M}\frac{p}{M}) = \xi D(0, \xi)(\frac{p^2}{M^2}+1) G(p, \xi) J(p, p, \xi) \tag{67}$$

他方比熱はD関数に比例することから，臨界点近傍では

$$C_p \sim D(0, \xi) = \frac{M^3}{\xi^2} = \xi^{3\nu-2} \tag{68}$$

が導びかれる。

更に $G(p, \xi)$ は一般に $p^2 < 0$ の領域で極及び多粒子状態から来る branch cutをもっているが，$p^2 \to p^2 - \varepsilon^2$ と補助変数を導入して，$G(p, \xi)$ を $p^2 - \varepsilon^2 < 0$ の領域に解析接続してやるとこの時実軸上の branch cutからのギャップはGの虚部で表わされるので

$2\,Im\,\mathrm{G} =$  $+$  $+ \cdots\cdots$ (69)

の関係（unitarity relation）が得られる。もっと一般には n_1 粒子が n_2 粒子に散乱される vertex $\Gamma_{n_1 n_2}$ について

$$2\,\mathrm{I}\,m\,\Gamma_{n_1 n_2} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \Gamma^{*}_{n_1 \ell}\, \Gamma_{\ell n_2}\, d\tau_\ell \tag{70}$$

$$d\tau_\ell = T^{\ell-1}\, \delta\,(\,E-\Sigma\,\varepsilon_i\,)\,\delta\,(\,\Sigma\,\vec{q}_i\,)\,\prod_{i=1}^{\ell} d\varepsilon_i\, d^2 q_i\,(\,ZM^2\,)\,\delta\,(\,\varepsilon_i^{\,2}-q_i^{\,2}-M^2\,)$$

$$= (\,TM^3\,)^{\ell-1}\, Z^\ell M \delta\,(\,E-\Sigma\sqrt{q_i^{\,2}+M^2}\,)\, M^2\,\delta\,(\,\Sigma q_i\,)\prod_{i=1}^{\ell}\frac{d^2\,q_i}{2M\sqrt{q_i^{\,2}+M^2}} \tag{71}$$

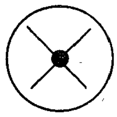
T は温度，上の計算で中間状態でのグリーン関数は極で近似した。

$$G(\,p\,,\,\xi\,) \cong \frac{ZM^2}{p^2+M^2} \quad , \qquad Z = G_1\,\xi^{-\gamma} \quad , \qquad M = \kappa\,\xi^{\nu} \tag{72}$$

もし（70）の両辺の各項が ξ について斉次であると仮定すると，（70）より

$$\Gamma_{n_1 n_2} = Z^{-n/2}\,(\,TM^3\,)^{1-n/2}\,\gamma_{n_1 n_2}\,(\frac{p_i}{M})$$

$$\propto \xi^{3\nu+n(\gamma-3\nu)/2}\,\gamma_{n_1 n_2}\,(\frac{p_i}{M}) \quad , \qquad n = n_1 + n_2 \tag{73}$$



が得られる。特に二体 vertex については

$$\Gamma_{22} \propto \xi^{2\gamma-3\nu}\,\gamma_{22}\,(\frac{p_i}{M}) \tag{74}$$

となる。$2\gamma > 3\nu$ の時には臨界点近傍では二体 vertex は小さくなる。 これは二体ポテンシャルがゆらぎによってスクリーンされることを意味している。

最後に Patashinskii，Pokrovskii (2) のボーズ液体の理論の困難について指摘する。P－Pは比熱の対数発散を説明するため G(p，0) として，

$$G(\,p\,) \propto |\,p\,|^{-3/2} \tag{75}$$

を選んだが，これは Γ_{22} が $\xi \to 0$ の極限で一定になるという仮定に基ずいている。しかし今 $\xi = 0$ の時の Γ_{22} を上の $G(p)$ を用いて摂動計算してやると，二次以上の各項は pにつ

いて対数発散していることが容易にわかる。

$$\Gamma_{22} \propto u_0 \left(1 + a \quad \ln \left(\frac{\lambda}{p} \right) \right) \tag{76}$$

こゝで a は u_0 の巾級数で表わされるが，すべてのダイアグラムを集めれば universality の原理により，a は u_0 によらない常数に収斂する。しかし更に Parquet型の項をすべて集めると上の項は

$$\Gamma_{22} = u_0 \left(\frac{p}{\lambda} \right)^{-a} \tag{77}$$

により Γ_{22} は実際 p のある巾に比例する。したがってこれを (74) と比較すると実際は $G(p, 0)$ は

$$G(p, 0) \sim p^{(a-3)/2} \tag{78}$$

でなければならない。したがって (75) の $G(p, 0)$ は a は完全に零になるような特別の場合の他は不安定点になっていることが判る。実際上の $G(p)$ から出発しても Γ_{22} に新らしい補正項を取り組んでやると一般には a の符号によって $\Gamma_{22} \gg 1$ か $\Gamma_{22} \ll 1$ になってP－Pの仮定は成立しなくなる。

Ⅱ) スケーリング律の破れ[5)]

この論文では三体力の場合 $r_0 = 0$ での臨界指数 η の非常に特殊な振舞いが議論される。即ち§3に示したように三体力の時には3次元が classical と critical を分ける点になっているので，三体力が小さくて，k が十分に小さくない時 ($k \gg k_0 = a^{-1} e^{-1/\eta} \cong 10^{-30} a^{-1}$) では3体力の結合常数 g による摂動計算によって臨界指数 η (i , e , $g(k, 0) = C k^{\eta-2}$) を計算できることが示される。したがって η は結合常数 g に依るので universality は見かけ上破れている。しかし k が十分小さな領域 ($k \ll k_0$) では universality は回復される。但しこの時に3体力の結合常数 g の大きさによって少なくとも二つの領域にわけることができる。もし $g < g_1$ であれば $k < k_0$ の領域では $\eta = 0$ になるが，$g > g_1$ では η は系の自由度 n のみによる一定値 $\eta = \eta_1(n)$ に収斂する。

§6　結　び

以上相転移理論についてのくりこみ群の方法について見て来たが，最近の Wilson の仕事ではモデルⅠについて ξ , ϕ , ψ を摂動展開によって explicit に計算しようというも

のである。特に二体力の時には4次元系ではclassicalになるという振舞いに着目し，展開パラメーターとして $\varepsilon=4-d$ を取ると，最初の少数個のダイヤグラムを取ることによって ϕ，ψ について十分意味のある結果が得られることを示した。今海老沢君と筆者は同様な手続きでDynamical scalingに関連した臨界指数を求めることを試みているが，形式的には計算は殆んど同様に行なわれるが，未だ解釈上少し問題がある。

文　　献

1) K.G. Wilson, Phys. Rev. B4 3174, 3184 (1971).

2) K.G. Wilson and M.E. Fisher, Phys. Letters 28 240 (1972).

3) K.G. Wilson, Phys. Rev. Letters 28 548 (1972).

4) A.A. Migdal, Soviet Phys. JETP 28 1036 (1969).

5) A.A. Migdal, Soviet Phys. JETP 32 552 (1971).

6) A.M. Polyakov, Soviet Phys. JETP 28 533 (1969).

7) A.M. Polyakov, Soviet Phys. JETP 30 151 (1970).

8) M. Gell−Mann and F.E. Low, Phys. Rev. 95 1300 (1954).

9) L.D. Landau, A.A. Abrikosov and I.Kalatnikov,
Nouvo Cimento Supplement. Ser x 380 (1956).

10) N.N. Bogoliubov and V. Shirkov,
Theory of Quantized Fields, Chap. Ⅷ. Interscinece Pub. Ltd.
London (1959).

11) A.Z. Patashinskii and V.L. Pokrovskii, Soviet Phys. JETP
19 677 (1964).