参 考 文 献

1) A.Miller et al, Phys. Rev. **127** ('62), 1452.
2) P.C.Hohenberg et al, Phys. Rev. **152** ('66), 198.
3) R.A.Cowley et al Can. J. Phys. **49** ('71), 177.
4) O.K.Harlirg Phys. Rev. **A3** ('71) 1073.
5) V.F.Sears Phys. Rev. **185** ('69), 200, ibid **A1** ('70), 1699.
6) H.W.Jackson Phys. Rev. **185** ('69), 185.
7) G.Sposito Phys. Rev. **A3** ('71), 820.
8) R.D.Puff et al Phys. Rev. **A1** ('70), 125.
9) W.C.Kerr et al Phys. Rev. **A2** ('70), 2416, ibid **A4** ('71), 2413.
10) H.A.Gersch Phys. Rev. **A4** ('71), 281, ibid **A5** ('72), 1547.

X スピンのブラウン運動

(9月4日受理)

阪大・教養 植 山 宏

1. 一定の外部磁場と乱雑に揺動している局所磁場の中でのスピンの運動

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \gamma\,\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M} + \gamma\,\mathbf{H}'(t) \times \mathbf{M} \qquad (1)$$

を考える。この問題はスピン緩和のモデルとして既に多くの人によって論じられている。[1] 久保・橋爪両氏[1]は，この問題をLangvin eq.の考えより論じた。即ち，乱雑な力は必然的に散逸を生じるという一般原則より，Bloch及び関連するFokker−Planck eq.が導かれている。最近，Langevin eq.の一般論が展開されている[2]ので，その一つの

応用として，この問題をもう一度考えてみる。

2.

Langevin eq の一般論は系の Hamiltonian より出発しているので，Stochastic model (1) に対応する Hamiltonian を設定しなければならない。実際に，(1)が考えられるのは，熱浴と考えられる多体系に接触した spin 系の全スピン角運動量についてである。この様な系について，その巨視的記述の方法とか Master eq.の導出，更には線型近似で Bloch eq. を導く事とかは，既に Tjon[3] によって示されている。彼の方法は Van Kampen[4] の一般論に依拠している。

Stochastic model と密接した形で議論するのには次の様にする。系の Haniltonian は

$$\mathscr{H} = \gamma \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M} + \gamma \mathbf{H}' \cdot \mathbf{M} + \mathscr{H}' \tag{2}$$

とする。$\mathbf{H}'$, $\mathscr{H}'$ は熱浴の自由度 Y の函数と考える。角運動 $\mathbf{M}$ の交換関係と $\mathbf{M}$ と Y との可換性の仮定より，(1) を導く事が出来る。系の微視的な状態は元来，個々のスピンの状態と Y によって指定されるものであるが，モデルとして微視的にも $\mathbf{M}$ の値 (M_x, M_y, M_z) と Y によって指定されるものとする。即ち，全スピン角運動量が巨視変数であって，よって古典的な量になり得る事を，当初より古典的なスピン (M_x, M_y, M_z を指定できるスピン) を考える事にすりかえる。即ち，系の微視的状態は $|M_x, M_y, M_z, Y>$ によって，巨視的状態は

$$|M_x, M_y, M_z > \sum_{Y} |M_x, M_y, M_z\, Y> \tag{3}$$

によって指定される。このモデルは，(2) の Hamiltonian を無意味にする。然し，

$$\mathscr{H} = \mathbf{H}_0 \mathbf{L} + \mathbf{H}' \mathbf{L} + \mathscr{H}' \tag{4}$$

$$\mathbf{L} = -i\, \mathbf{M} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \tag{5}$$

を考えれば，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \frac{1}{i}\left[\mathscr{H}, \mathbf{M}(t)\right] = \frac{1}{i}\left\{\mathscr{H}\mathbf{M}(t) - \mathbf{M}(t)\mathscr{H}\right\} \tag{6}$$

は，交換関係

$$[L_i, M_j] = iM_k \qquad ((i,j,k)\text{は}(x,y,z)\text{の偶置換})$$

によって(1)式を正しく再現する。即ち，古典的スピン**M**は，ハミルトニアン(4)を導入する事によって量子力学と同じ形式で論じる事が出来る。

力学変数 $\hat{\mathbf{M}}$（従前の**M**）の固有状態　$|\mathbf{M}>$は

$$|\mathbf{M}> = |\delta(\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M})> \tag{7}$$

と書ける。

さて，(1)式は変換

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}_0(t)\ \mathbf{M}'(t) \tag{8}$$

$$\mathbf{A}_0(t) = \begin{pmatrix} \cos\gamma H_0 t & -\sin\gamma H_0 t & 0 \\ \sin\gamma H_0 t & \cos\gamma H_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

によって（$\mathbf{H}_0$ の方向を z 軸にとる）。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}' = \gamma\,\mathbf{H}' \times \mathbf{M}' \tag{10}$$

に表す事が出来るので[3]，今後ハミルトニアンの Zeemam 項 $\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M}$ 又は $\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{L}$ は省略する。

ハミルトニアンを

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}' + \lambda\,\mathbf{H}' \cdot \mathbf{L} \tag{11}$$

と書き λが小さいとすれば，Langevin eq.の一般論[2]に従い，力学変数

$$q_M(t) \equiv e^{iLt}|M><M| = e^{i\mathscr{H}t}|M><M| - |M><M|e^{i\mathscr{H}t} \tag{12}$$

に対するMarkoffian stochastic eq.

$$\frac{d}{dt}q_M(t) = -\int dM'\,k(M, M')\,q_{M'}(t) + r_M(t) \tag{13}$$

が導かれる。但し,

$$r_M(0) = (1-P)\{\, i\, H'\cdot L\, |M\rangle\langle M| - i|M\rangle\langle M|\, H'\cdot L\} \tag{14}$$

Pは巨視状態 $\{|M\rangle\}$への写影演算子である。又，関係

$$T_r\ r_M(0)\ r_{M'}(0) = -k(M, M') \tag{15}$$

が成立する。

(3) を用いて，(14) を求めれば

$$r_M(0) = \sum_j \sum_Y H'_j(Y) \sum_{M''} \{L_j(M'',M)|M''Y\rangle\langle M,Y| - L_j(M,M'')|M,Y\rangle\langle M'',Y|\} \tag{16}$$

とする。但し,

$$\begin{aligned} L_j(M, M') &\equiv \langle M, Y|L_j|M', Y\rangle \\ &= -L_j\,\delta(M-M') \end{aligned} \tag{17}$$

とした。又,

$$\begin{aligned} k(M, M') = \sum_{j,k}\Big(\sum_Y H'_j(Y)H'_k(Y)\Big)\{ & L_j(M'M)\,L_k(MM') \\ & + L_j(MM')\,L_k(M'M) \\ & - \delta_{MM'} \sum_{M_1} [L_j(M_1M)\,L_k(M'M_1) + L_j(MM_1)\,L_k(M_1M')]\} \end{aligned} \tag{18}$$

が得られる。

今，項 $(\sum_Y \cdots)$ が，M，M′ に依存せず,

$$\sum_Y H'_j(Y)\,H'_k(Y) = \frac{1}{2\tau_j}\,\delta_{jk} \tag{19}$$

であるという仮定を導入する。この場合には,

$$k(M, M') = -W(M, M') + \delta_{MM'} \sum_{M'} W(M_1, M) \tag{20}$$

$$W(M, M') = -\sum_j \frac{1}{\tau_j}\,|L_j(M, M')|^2 = -\sum_j \frac{1}{\tau_j}\,L_j^2\,\delta(M-M') \tag{21}$$

とする。

一般論に従えば，(13)より random force $r_M(t)$ を除いたものは Mastev eq. である。これは

$$\frac{d}{dt} f(M,t) = \int dM'W(M,M') f(M',t) - \int dM'W(M',M) f(M,t) \qquad (22)$$

となる。(21)を参照して，文献(1)の(23)式と比較すれば，上式((22))の第二項が余分の様に見える。しかしこの項は(21)式より恒等的にゼロになる。

Langevin eq は，$\hat{\mathbf{M}} = \sum_{M} |M>M<M|$ に注目して，(13)より

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_j(t) = \alpha_{j1}(\mathbf{M}) + \mathbf{R}_j(t) \qquad (23)$$

と導ける。但し，

$$\alpha_{j1}(M) = \int (M'_j - M_j) W(M', M) dM' \qquad (24)$$

$$= -\left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k}\right) M_j \qquad (i,j,k = x \cdot y,z) \qquad (25)$$

となり，通常の Bloch eq. に相当する事が分る。又，(14)より

$$\mathbf{R}_j(t) = \int M_j r_M(t) dM = \mathbf{H}'(t) \times \mathbf{M}(t) \qquad (26)$$

となる。Fokker－Planck eq. は Master より Krammers － Moyal 展開で得られるが，必要な 2 nd derivate moment

$$\alpha_{2ij}(M) = \frac{1}{2}\int (M'_i - M_i)(M'_j - M_j) W(M',M) dM' \qquad (27)$$

は，

$$\alpha_{2jj}(M) = \left\{ \frac{1}{\tau_i} M_k^2 + \frac{1}{\tau_k} M_i^2 \right\} \qquad ((i,j,k) = (x,y,z))$$

$$\alpha_{2ij}(M) = \frac{1}{\tau_k} M_i M_j \qquad (\quad " \quad) \qquad (28)$$

となり， random force の相関函数 d_{ij}

$$< R_i(0) R_j(t) > = d_{ij}\, \delta(t) \qquad (29)$$

との間の一般的関係

$$d_{ij} = \alpha_{2ij} \tag{30}$$

を満す事も分る。よって，今，拡散係数

$$D_j \equiv D_{jj} = \int \alpha_{2}jj(M)\, f^{eq}(M)\, dM$$
$$= \frac{1}{\tau_i} < M_k^2 > + \frac{1}{\tau_i} < M_i^2 > \tag{31}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{\tau_k} < M_i M_j > = 0 \tag{32}$$

と，散逸係数

$$r_j = \left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k} \right) \tag{33}$$

を導入すれば，Fokker－Planck eq．は

$$\frac{\partial}{\partial t} f(M,t) = \sum_j \frac{\partial}{\partial M_j} r_j f(M,t) + \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial M_j}\right)^2 D_j f(M,t) \tag{34}$$

となる。

(31)と(34)より導かれる r_j と D_j の関係が Einstein relation である。

文献[(1)]には，Landau－Lifshitz friction term について興味ある研究が行われている。この場合には非線型性が問題となる。一般論[(2)]は非線型系についても有効である筈である。よって，いづれ Landau－Lifshitz term に関して議論するつもりである。

最後に，最近発表された川端氏の論文[(5)]では，方程式(1)，と(19)（多少形が異る）の仮定より，Landau－Lifshitz term が出てくるが，これは少しおかしい。何故なら，Bloch eq． 自身は，もっと直接的な初歩的な方法でも導出できて，決してこの様な非線型項は生じない事が分る。

参考文献

1) R.Kubo and N.Hashitsume, Suppl. Prog. Theor. Phys. **46** 210 (1970)
従前の論文についても詳しい。
2) H.Ueyama, to be published in Prog. Theor. Prog. **48**
3) J.A.Tjon, Physica **30** 1, 1341. (1964)
4) N.G. van Kampen, Physica XXIII 707, 816 (1957)
5) A.Kawabata, Technical Report of ISSP. A No. 522