一次元異方性ハイゼンベルグ模型の熱力学

阪大教養　高橋　実
東大物性研　鈴木増雄

（10月17日受理）

我々は各原子が$\frac{1}{2}$スピンを持ち，近接原子同志が異方的交換相互作用をしている系を考察する。ハミルトニアンは

$$\mathscr{H}=\sum_{i=1}^{N} J_x S_i^x S_{i+1}^x + J_y S_i^y S_{i+1}^y + J_z S_i^z S_{i+1}^z \qquad \mathbf{S}_{N+1} = \mathbf{S}_1 \tag{1}$$

である。ここでは特に $J_x = J_y$ でかつ，z方向に磁場のある場合を考察する。ハミルトニアンは

$$\mathscr{H} = J \sum_{i=1}^{N} \{S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \triangle (S_i^z S_{i+1}^z - \frac{1}{4})\} - 2\mu_0 H \sum_{i=1}^{N} S_i^z \tag{2}$$

である。Bethe と Orbach はこの系の固有状態は下向きスピンの数をMとしたとき，M個の擬似運動量によって作られるM！個の一次結合であるとして固有状態を求めることに成功した。ただしM個の擬似運動量 k_j は次の連立方程式を満足しなければならない。

$$e^{ik_jN} = -\prod_{\ell=1}^{M} \frac{2\triangle e^{ik_j} - 1 - e^{i(k_j+k_\ell)}}{e^{i(k_j+k_\ell)} + 1 - 2\triangle e^{ik_\ell}} \qquad j = 1, 2, \cdots, M. \tag{3}$$

ここで，

$$\cot\frac{k_j}{2} = \cot\frac{\theta}{2}\,\mathrm{th}\frac{\theta x_j}{2}, \quad \cos\theta = \triangle, \quad \pi/\theta \geq \mathrm{Im}\, x_j > -\pi/\theta$$

なる変換を行えば，この方程式は

$$\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{\theta}{2}(x_j+i)}{\mathrm{sh}\frac{\theta}{2}(x_j-i)}\right\}^N = -\prod\left\{\frac{\mathrm{sh}\frac{\theta}{2}(x_j-x_\ell+2i)}{\mathrm{sh}\frac{\theta}{2}(x_j-x_\ell-2i)}\right\}, \qquad j = 1, 2, \cdots, M, \tag{4}$$

のように書ける。エネルギー固有値は

$$E = \sum_{j=1}^{M} \left(-2\pi J\,\theta^{-1}\sin\theta\, a(x) + 2\mu_0 H\right) - N\mu_0 H\,,$$

$$a(x) = \frac{\theta}{2\pi}\,\frac{\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\theta x - \cos\theta}\,, \tag{5}$$

で与えられる。(2) のすべてのエネルギー固有値は (4) のすべての解を求めることによって与えられると仮定しよう。自由エネルギーを求めるには (4) の解について考察しなければならない。x_j は一般に複素平面上で

$$x_j = \xi + (n+1-2\ell)\,i + O(\exp - N\delta) \quad \xi \text{ は実数} \quad \ell = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{6a}$$

$$x_j = \xi + (n+1-2\ell)\,i + (\pi/\theta)\,i + O(\exp - N\delta) \tag{6b}$$

のような string を作る。6a (b) を parity + (−) 次数 n の string と呼ぼう。

特に $\pi/\theta \equiv \nu = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ の場合については，parity が + で次数が 1, 2, …, $\nu-1$ の string 及び，parity − で次数が 1 のもののみが存在するという仮定を置こう。このような string の実部に対する分布函数をそれぞれ $\rho_j(x)$，$j = 1, 2, \cdots, \nu$ とし，又 string の hole に対する分布函数を $\rho_j^k(x)$ としよう。自由エネルギー最小の条件から $\rho_j^k(x)/\rho_j(x) = \eta_j(x)$ に対する非線形の積分方程式が導かれる。

$$\ell n\ \eta_j = s * \ell n\ (1+\eta_{j-1})(1+\eta_{j+1})\,, \qquad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-3,$$

$$\ell n\ \eta_{\nu-2} = s * \ell n\ (1+\eta_{\nu-3})(1+\eta_{\nu-1})(1+\eta_{\nu})\,,$$

$$\ell n\ \eta_{\nu-1} = s * \ell n\ (1+\eta_{\nu-2}) + \frac{\nu\mu_0 H}{T},$$

$$\ell n\ \eta_{\nu} = s * \ell n\ (1+\eta_{\nu-2}) - \frac{\nu\mu_0 H}{T},$$

但し，$\ell n\ (1+\eta_0) = -\dfrac{2\pi J\sin\theta}{T\theta}\,\delta(x)$ と置く。自由エネルギーは

$$F/N = -\frac{2\pi J\sin\theta}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,s(x)\,dx - T\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\ell n\ (1+\eta_1(x))\,dx$$

で与えられる。ここで $s(x) = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{sech}\,\dfrac{\pi}{2}x$，$s * f(x) \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s(x-x')\,f(x')\,dx'$ である。

我々は $\pi/\theta \fallingdotseq$ 整数の場合について，又 $J_x = J_y$ の場合について，同様の非線形積分方程式を得ることに成功した。

参　考　文　献

1) M. Takahashi and M. Suzuki, ISSP A 518 (1972) and references sited therein.
2) M. Takahashi and M. Suzuki, Phys. Letters A (in press).

揺動する環境内での Ising－spin 系の stochastic な運動

北大・理　　大　野　鑑　子

（１０月１７日受理）

秩序－無秩序型に分類される強誘電体のモデルとして $m=\frac{1}{2}$ のスピン系が，しばしば用いられる。その dynamics も Ising－スピン系に Glauber 型 master equation を仮定して[1]，あるいは別方向の成分を導入したハミルトニアンを仮定して[2] 調べられてきた。しかし，磁性体におけるスピンと異なり，この場合のスピンの方向の変化は，イオンの運動と結びついているから，スピンの変化は，その周囲のイオンの再配列をひきおこし，しかもその効果は，そのスピンの近傍にのみ留まらないものと考えられる。

ここでは，このような環境の変化が全体としては重なり合って，ランダムな時間変化を引きおこすと仮定し，Glauber 型 master equation に従う Ising －スピン系の運動が，これによってどのような変化を受けるかを，分子場近似の範囲内で考察した。

いま，スピンとその環境から成る系の状態を，スピン変数 $\{s\} \equiv \{s_1, s_2, \cdots s_N\}$ $s_j = \pm 1$ と，環境をあらわす変数の組 $\{x\}$ とで記述するものとし，ある時刻 t でそれぞれがある値の組 $\{s\}$ と $\{x\}$ をとる確率密度を $P(\{s\}, \{x\}, t)$ とする。 j番目のスピンが s_j から $-s_j$ に値を変える確率を $W_j(s_j)$ とし，また，$\{x\}$ の値が変わることによるPの時間変化は，$\{x\}$ に対する演算子 Γ によってきまるとする。このとき