スピンのブラウン運動 Ⅱ

阪大・教養　植　山　　宏

（9月22日受理）

3. 前節（文献[A] § 2）の結果は，遷移確率（21）に基ている。この遷移確率（以下 $W_0(M, M')$ と書く）は，ハミルトニアンの摂動項より $|H'(M, M')|^2$ として求められたものであり，正確な $W(M, M')$ は文献[5]* の（2－26）式より

$$W(M, M') = n(M, \varepsilon)\, W_0(M, M') \tag{35}$$

でなければならない。今，系を巨視変数Mで張られる部分系と，それ以外の部分に分割し，後者を熱浴と考えれば，$n(M, \varepsilon)$ はカノニカル分布

$$n(M, \varepsilon) \propto A\, e^{-\beta\varepsilon'(M)} \equiv f^{eq}(M) \tag{36}$$

となる事が分る。[6]

この時，（35）より $W_0(M, M') = W_0(M', M)$ を利用すれば，詳細釣合の条件

$$W(M, M')\, f^{eq}(M') = W(M, M')\, f^{eq}(M) \tag{37}$$

が導かれる。

4. よって

$$f^{eq}(M) = A\, e^{-\beta H_0 M_z} \tag{38}$$

を導入すると

$$W(M, M') = -A \sum_j \frac{1}{\tau_j}\, e^{-\beta H_0 M_z}\, L_j^2\, \delta(M - M') \tag{39}$$

となる。この遷移確率の 1st derivate moments は

＊ 文献[A] の参照（1）～（5）の番号を示す。

$$\alpha_{1x} = -\left(\frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z}\right) M_x + \frac{1}{\tau_y}\beta H_0 M_x M_z$$

$$\alpha_{1y} = -\left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_z}\right) M_y + \frac{1}{\tau_x}\beta H_0 M_y M_z \tag{40}$$

$$\alpha_{1z} = -\left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y}\right) M_z - \beta H_0 \left(\frac{1}{\tau_x} M_y^2 + \frac{1}{\tau_y} M_x^2\right)$$

となる。2nd derivates moments は§2の(28)と変らない。これは，random force によって規定されている。

仮定

$$1/\tau_x = 1/\tau_y = 1/2\tau_0, \quad 1/\tau_x + 1/\tau_z = 1/\tau_y + 1/\tau_z = 1/\tau_1 \tag{41}$$

を導入すれば，Langevin eq. は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = -\Gamma\mathbf{M} - \eta(\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M}) \times \mathbf{M} + \mathbf{R} \tag{42}$$

となり，右辺第二項は Landau - Lifshitz friction を示す。但し，

$$\Gamma_{ij} = \gamma_j\,\delta_{ij} \qquad \gamma_x = \gamma_y = 1/\tau_1 \qquad \gamma_z = 1/\tau_0 \tag{43}$$

$$\eta = -\frac{\beta H_0}{2\tau_0} \tag{44}$$

となる。§2(8)の変換を元へ戻せば，(42)は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \gamma\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M} - \Gamma\mathbf{M} - \eta(\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M}) \times \mathbf{M} + \mathbf{R} \tag{45}$$

を意味する。Fokker - Planck eq. は，α_2 まで考える近似では，

$$\frac{\partial}{\partial t} f(M,t) = -\sum_j \frac{\partial}{\partial M_j}\{\alpha_{1j}(M)\, f(M,t)\} + \sum_{ij}\{\frac{\partial^2}{\partial M_i \partial M_j}\alpha_{2ij}(M) f(M,t)\} \tag{46}$$

となり，久保・橋爪両氏[(1)]の(34)式と同じである。尤も，そこで表れる δ を $\delta = 0$ と

する。この結果は本質的に川端氏の結果[5]と等しい内容である。

5. 前節の結果は，§ 1. (1) 式を直接に積分する初等的方法の結果と予盾する。

即ち，(1) を

$$\mathbf{M}(t) = \exp\{\int_0^t A(s)\,ds\}\,\mathbf{M}(0) \tag{47}$$

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma H_z'(s) & \gamma H_y'(s) \\ \gamma H_z'(s) & 0 & -\gamma H_x'(s) \\ -\gamma H_y'(s) & \gamma H_x'(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

と積分し，確率変数 $H_j'(s)$ について平均する。

仮定

$$< H_j'(0)\, H_k'(s) > = \Psi_j(s)\,\delta_{jk} \tag{49}$$

を仮定し，$H_j'(s)$ の2次相関まで正しく求めると，

$$\begin{aligned} <\mathbf{M}(t)> &= <\exp\int_0^t \mathbf{A}(s)\,ds>\mathbf{M}(0) \\ &= \exp\left[<\exp\int_0^t \mathbf{A}(s)\,ds - 1>_c\right]\mathbf{M}(0) \end{aligned} \tag{50}$$

故に，

$$<M_i(t)> = \exp\{\int_0^t -(\Psi_j(s)+\Psi_k(s))ds\}\,M_i(0) \tag{51}$$

(i, j, k) は (x, y, z) の置換

となり，これより，

$$\frac{d}{dt}<M_i(t)> = -\int_0^t (\Psi_j(s)+\Psi_k(s)) <M_i(t-s)>\,ds \tag{52}$$

となる。マルコフ近似をすれば，

$$\frac{d}{dt}\langle M_i(t)\rangle = -\left(\frac{1}{\tau_j}+\frac{1}{\tau_k}\right)\langle M_i(t)\rangle \tag{53}$$

となり，常に線型である。但し，

$$\frac{1}{\tau_j} = \int_0^\infty \Psi_j(s)\,ds \tag{54}$$

(53)の結果は，(49)の代りに

$$\langle H_j'(0)\,H_k'(s)\rangle = \frac{1}{\tau_j}\,\delta_{jk}\,\delta(s) \tag{55}$$

とするのと同じである。

故に，$\{H_j'(s)\}$が$\mathbf{M}(0)$と統計的に独立である限り，Landau－Lifshitz friction といった非線型項は生じ得ない。

6. 結　び

§4の結論は，(38)より得られたものである。所が，classical spinでは(38)は成立たない。Zeemann項に対するハミルトニアンは通常H_0M_zであり，その固有値(エネルギー)は，H_0M_zである(M_zを対角化する表示で)。所が我々のハミルトニアンはH_0Lであり，その表示は

$$\begin{aligned}&\langle M_xM_yM_z \mid H_0L \mid M_x'M_y'M_z'\rangle\\ &= -H_0L_z\,\delta(M_x-M_x')\,\delta(M_y-M_y')\,\delta(M_z-M_z')\\ &= +\,i\,H_0\left\{\frac{M_x}{M_y-M_y'}-\frac{M_y}{M_x-M_x'}\right\}\delta(M-M')\end{aligned} \tag{56}$$

となり，対角的でない。よって，平衡分布(36)は，(38)でなく一様分布であって，よって結局§2の計算が正しく，§4は誤りという事になる。

この事は，§4の無意味という事ではない。遷移確率(39)は一つの確率論的モデルを提供している。この確率過程はLangevin eq.(45)ででも表現される。

又，古典的なモデルを量子論的なモデルに置換することによって，§4の結果も得ることが出来るものと思われる。事実，WangnessとBloch[7]の(4―19)(4―20)両式

にはLandau - Lifshitz friction に相当する項が含まれている。 彼らの方法は master eq. によるが，master eq. の方法と Langevin eq. の方法とは本質的には異る所がないので(2)，残された問題はそう多くはない。唯，Zwanzig 等によって発達した最近のmaster eq. の方法で文献(7)を再検討するのは面白そうである。

文　献

(A)　物性研究　vol. 19. no. 1.

(6)　H. Ueyama　(unpublished)

(7)　R.K.Wangness and F.Bloch, Phys. Rev. 89 728 (1953)