スピンのブラウン運動 III

— 結　語 —

阪大・教養　植　山　　宏

（11月18日受理）

7. 前稿 I，II*（§1〜§6）に於て，“古典的スピン”を定義し，これの熱浴中での運動を論じた。就中，IIでは磁化が熱平衡値でなく零に向って緩和する事になるという困難と，（結局は同じことだが）Landau－Lifshitz friction が生じない事になるという困難について論じ，これらは古典的スピンでは当然の事であることを示すとともに**，Wangness と Bloch の量子力学的に正しい取扱いによれば解決され得る事を示した。

最近，一応の解決***が為されたのでその概要を示す。

8. Wangness と Bloch[7]〔以下W－Bと略記する〕と同じモデルを考える。即ち，Nケの相互作用のないスピン（簡単の為½とする）が熱浴と双極子相互作用（W－Bではより一般の場合が論じてある）しているものとする。W－Bは相互作用のない点を利用して，一つの代表的スピンに着目し，その運動を論じ，最后に初期条件について平均するという操作をとったが，ここでは確率論的方程式は巨視変数について成立するという van Kampen[4] の立場に立って，全スピン・モーメント（の平均）

$$S_\alpha = \frac{1}{N}\Sigma_j\ S_{j\alpha} \qquad (\alpha = x, y, z) \tag{1}$$

の運動を考える。これらは，$N\to\infty$ の極限（スピン間相互作用を考えていないので，これが即ち熱力学的極限）で相互に交換可能となり，従って古典的な巨視変数の set をなす。

（脚注）　*　物性研究　vol. 19　no. 2，153

**　F. Bloch[8] にも指摘されている。

***　H. Ueyama，J. Phys. Soc. Japan（投稿中）

又は，$S^{\pm}=S_x \pm i S_y$，$S^0 = S_z$ を導入すれば，これらは

$$\langle m|S^{(\tau)}|m'\rangle = S_m^{(\tau)}\,\delta_{m',\,m-\tau\varepsilon'} \tag{2}$$

但し

$$S_m^{(0)} = m, \qquad S_m^{(+)} = \{(1/2+m)(1/2-m+\varepsilon)\}^{1/2}$$

$$S_m^{(-)} = \{(1/2+m+\varepsilon)(1/2-m)\} \tag{3}$$

$$\varepsilon \equiv 1/N \tag{4}$$

と表示される。

全系の状態は熱浴等の変数 b を付加して $|m,b\rangle$ で与えられるから，Langevin eq. の方法の一般論[2)]を少し拡張して

$$q_m^{(\eta)}(t) = e^{iLt}\sum_b |m,b\rangle\langle m-\eta\varepsilon, b| \quad (\eta=0,\pm1) \tag{5}$$

の満す確率方程式

$$\frac{d}{dt}q_m^{(\eta)}(t) = i\eta\omega_0\varepsilon\, q_m^{(\eta)}(t) - \sum_{m_1} k_{mm_1}^{(\eta)} q_{m_1}^{(\eta)}(t) + r_m^{(\eta)}(t) \tag{6}$$

但し，

$$K_{mm_1}^{(\eta)} = \sum_\tau \Phi^{(\tau)}\{\delta_{mm_1}[S_{m-\eta\varepsilon}^{(\tau)} S_{m-\eta\varepsilon-\tau\varepsilon}^{(-\tau)} + S_m^{(\tau)} S_{m-\tau\varepsilon}^{(-\tau)}]$$

$$- 2S_{m-\eta\varepsilon}^{(\tau)} S_{m-\tau\varepsilon}^{(-\tau)}\,\delta_{m,m-\tau\varepsilon}\} \tag{7}$$

$$\Phi^{(-\tau)} = e^{2\beta\omega_0\varepsilon}\,\Phi^{(\tau)} \tag{8}$$

を得る事が出来る。又，揺動力と積分核の間には

$$\mathrm{Tr}\; r_{m'}^{(\eta)\dagger}(0)\, r_m^{(\eta')}(t) = -\,k_{mm'}^{(\eta)}\,\delta(t)\,\delta_{\eta\eta'} \tag{9}$$

が成立する。(6) 式で relevant part のみ考えれば，揺動力 $r_m(t)$ のない式が得られるが，これは W－B の“Boltzmann”方程式である。(6) 式より又，

$$S^{(\tau)}(t) = \Sigma_m S_m^{(\tau)} q_m^{(\tau)}(t) \tag{10}$$

により量子論的確率方程式を導く事も出来る。

最后に，$N \to \infty$ の極限（$\varepsilon \to 0$）によって，熱力学的極限での方程式が得られる。この極限では $\varepsilon^2 \Phi^{(\tau)} \to \Psi^{(\tau)}$：有限 と考えるのが適当と考えられる。この結果，(6) 式は

$$\frac{d}{dt} q^{(\eta)}(m, t) = -\int K^{(\eta)}(m, m_1)\, q^{(\eta)}(m_1, t)\, dm_1 + r^{(\eta)}(m, t) \tag{11}$$

但し

$$K^{(\eta)}(m, m_1) = \{\eta^2 \Psi^{(0)} - 2m\Psi^{(1)} \frac{\partial}{\partial m} - 2\beta\omega_0 \Psi^{(1)} (\tfrac{1}{4} - m^2) \frac{\partial}{\partial m} - 2(\tfrac{1}{4} - m^2)\Psi^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial m_1^2}\}\, \delta(m - m_1) \tag{12}$$

が得られる。例によって，(11) 式は master eq. と nonlinear Langevin eq. の双方を与える。(11) は又，(3) によって s_x，s_y，s_z を変数とする表式にも書換えられる。こうして得られる nonlinear Langevin eq. は丁度 Bloch eq. に揺動力を付加した形になっている。 (11) より得られる 2 階微分形の master eq = Fokker − Planck eq. は，古典スピンの研究より推測されたもの（ Ⅱ ー (46) 式 ）とは少し異っている。

9. 最后に前稿の訂正

a. Ⅰ. 2 ー (12) 式は正しくは

$$\frac{d}{dt} g_M(t) = e^{iLt} |M\rangle\langle M| = e^{i\mathcal{H}t} |M\rangle\langle M| e^{-i\mathcal{H}t} \tag{12}$$

b. Ⅰ. 3 ー (30) 式は，一般的関係ではない。

参 考 文 献

1) ～ 7) までは Ⅰ, Ⅱ を参照されたい。

8) F.Bloch, Phys. Rev. 105 (1957) 1206