Exact Eigenstates of the Pairing-Force-Hamiltonian. I
Fermion System

山口大・文理・物理　下　瀬　育　郎
秋　吉　康　光

（9月17日受理）

§1．まえがき

pairing force interactionをもつ fermion からなる体系の問題は，J. Bardeen, L. N. Cooper および J. R. Schrieffer[1]，N. N. Bogoliubov[2]，J. G. Valatin[3] 等によって超伝導について，また R. W. Richardson および N. Sherman[4-7] 等によって原子核modelについて扱われてきた。とくに，Richardson[5] は核modelへの応用として，pair energyの縮退がない条件のもとに，pair数の小さい場合にも成立つ厳密解をえた。本論文では，Richardsonが Boson 系の場合について扱った方法[8] にならい，しかし上記の条件をもうけることなしに厳密解をえた結果について報告する。

§2．pairing－force－Hamiltonianの eigenstates

paired fermion からなる体系（ pair 数N ）を考察し，その Hamiltonian を次式で与える。

$$H = \sum_{f} 2\varepsilon_f \hat{N}_f - g \sum_{f} \sum_{f'} \alpha_f^{+} \alpha_{f'} , \tag{1}$$

ここに

f ： single－partcle quantum numbers,

ε_f ： single－particle energy levels,

g ： pair interaction の強さを表わす constant,

(2)

$$\hat{N}_f = \frac{1}{2}\left(a^+_{f+} a_{f+} + a^+_{f-} a_{f-} \right) , \tag{2}$$

$$\alpha^+_f = a^+_{f+} a^+_{f-} , \qquad \alpha_{f'} = a_{f'-} a_{f'+} \tag{3}$$

指標（f+），（f−）は time reversal に関して共役な状態を表わす。また a^+_{f+}，a^+_{f-}ははは creation operators を，$a_{f'+}$，$a_{f'-}$ は，annihilation operatorsを表わし，fermion 反交換関係

$$\begin{aligned} [a_{f\sigma} , a^+_{f'\sigma'}]_+ &= \delta_{ff'} \delta_{\sigma\sigma'} , \\ [a^+_{f\sigma} , a^+_{f'\sigma'}]_+ &= [a_{f\sigma} , a_{f'\sigma'}]_+ = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

をみたすとする。

$$[\alpha_f , \hat{N}_{f'}] = \delta_{ff'} \alpha_f , \qquad [\hat{N}_f , \alpha^+_{f'}] = \delta_{ff'} \alpha^+_f , \tag{5}$$

$$\begin{aligned} [\alpha_f , \alpha^+_{f'}] &= \delta_{ff'} (1 - 2 \hat{N}_f) \\ [\alpha^+_f , \alpha^+_{f'}] &= [\alpha_f , \alpha_{f'}] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

が成立する。次の pair creation および annihilation operators を定義する。

$$A^+_i = \sum_f u_i (f) \alpha^+_f , \qquad A_i = \sum_f u_i (f) \alpha_f , \tag{7}$$

$$i = 1 , \cdot \cdot \cdot \cdot , N.$$

明らかに $A^+_i A^+_j = A^+_j A^+_i$. (8)

u_i (f) は次の $|\psi>$ がHの eigen vector であるようにきめる。

$$|\psi> = A^+_1 \cdot \cdot \cdot \cdot A^+_N | 0 > , \tag{9}$$

ここに $|0>$ は vacuum state である。

さて

$$\alpha_f |0> = 0 \quad , \tag{10}$$

だから

$$H|0> = 0 \quad .$$

よって

$$H|\psi> = [H, A_1^+ \cdot\cdot\cdot\cdot A_N^+] \, |0> \quad . \tag{11}$$

次に

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^{N}{}' H_{ij} \tag{12}$$

とおくと，

$$H|\psi> = \{ \sum_{i=1}^{N} (\prod_{j \neq i} A_j^+) (H_i A_i^+ - A_i^+ H_i)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^{N}{}' (\prod_{k \neq i,j} A_k^+) (H_{ij} A_i^+ A_j^+ - A_i^+ A_j^+ H_{ij}) \} |0> \quad ,$$

書きなおすと

$$H|\psi> = \{ \sum_{i=1}^{N} (\prod_{j \neq i} A_j^+) [H, A_i^+]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^{N}{}' (\prod_{k \neq i,j} A_k^+) [[H, A_i^+], A_j^+] \} |0> \tag{13}$$

容易に説明できる次の交換関係

$$[\alpha_f^+ \alpha_{f'}, \alpha_{f''}^+] = \delta_{f'f''} \alpha_f^+ (1 - 2\hat{N}_{f'}) \quad , \tag{14}$$

$$[\alpha_f^+ \hat{N}_{f'}, \alpha_{f''}^+] = \delta_{f'f''} \alpha_f^+ \alpha_{f'}^+ \tag{15}$$

および(5)，(6)を用いて

$$[H, A_i^+] = \sum_f 2\,\varepsilon_f\, u_i(f)\,\alpha_f^+$$

$$- g\sum_f \sum_{f'} \alpha_f^+ u_i(f')(1-2\hat{N}_{f'}) \quad , \qquad (16)$$

$$[[H, A_i^+], A_j^+] = 2g \sum_f \sum_{f'} \alpha_f^+ u_i(f')\, u_j(f')\, \alpha_{f'}^+ \qquad (17)$$

をうる。

次にHの固有値Eを

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \qquad (18)$$

とおくと

$$(H-E)\,|\psi> = \sum_{i=1}^{N} (\prod_{j\neq i} A_j^+) \sum_f \alpha_f^+\{(2\varepsilon_f - E_i)\,u_i(f)$$

$$- g\sum_{f'} u_i(f')(1-2\hat{N}_{f'})\}\,|0>$$

$$+ g\sum_{\substack{i,j\\(i\neq j)}}^{N} (\prod_{k\neq i,j} A_k^+) \sum_f \alpha_f^+\{\sum_{f'} u_i(f')\, u_j(f')\,\alpha_{f'}^+\}\,|0>. \qquad (19)$$

$\hat{N}_{f'}\,|0> = 0$ を用い，$<\psi|H-E|\psi> = 0$ の関係から

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_f [\{(2\varepsilon_f - E_i)\,u_i(f)^2 - g\,u_i(f)\sum_{f'} u_i(f')\}\cdot \prod_{j\neq i}(\sum_{f''} u_j(f'')^2)$$

$$+ g\,u_i(f)\sum_{f'} u_i(f')\sum_{j=i}^{N}\{u_j(f')^2 \cdot \prod_{k\neq i,j}(\sum_{f''} u_k(f'')^2)\}] = 0 \qquad (20)$$

をうる。これから

$$(2\varepsilon_f - E_i)\,u_i(f) - g\sum_{f'} u_i(f')$$

$$+ g\sum_{f'} u_i(f')\sum_{j\neq i}^{N} \frac{u_j(f')^2}{\sum_{f''} u_j(f'')} = 0 \quad , \qquad (21)$$

$$i = 1, \cdots\cdots, N.$$

上式左辺の第２項，第３項は指標 i だけによるから

$$u_i(f_i) = \frac{gC_i}{2\varepsilon_f - E_i} , \tag{22}$$

ここに

$$C_i = \sum_{f'} u_i(f') - \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j \neq i}^{N} \frac{u_j(f')^2}{\sum_{f''} u_j(f'')^2} . \tag{23}$$

よって

$$1 - g\sum_f (2\varepsilon_f - E_i)^{-1} + g\sum_f (2\varepsilon_f - E_i)^{-1} \sum_{j \neq i}^{N} \frac{(2\varepsilon_f - E_j)^{-2}}{\sum_{f'} (2\varepsilon_{f'} - E_j)^{-2}} = 0 , \tag{24}$$

$$i = 1, \cdots\cdots N.$$

これから pair energy E_i $(i=1, \cdots\cdots, N)$ がきめられる。

§3. 結　び

Richardson[5] は

$$E_i \neq E_j \qquad (i = j)$$

の条件のもとに，pair energy E_i $(i=1, \cdots\cdots, N)$ を厳密に求める式（同論文における（3・24））

$$1 - g\sum_f (2\varepsilon_f - E_i)^{-1} + 2g\sum_{j \neq i}^{N} (E_j - E_i)^{-1} = 0 ,$$

$$i = 1, \cdots\cdots, N$$

をえているが，この式は本論文における (24) に相当する。本論文では上の条件を課することなく，しかも E_i の厳密値を求める式として (24) がえられた。

文　　献

1) J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
2) N. N. Bogliubov, Nuovo Ciment 7 (1958) 794.
3) J. G. Valatin, Nuovo Ciment 7 (1958) 843.
4) R. W. Richardson, Phys. Letters 3 (1963) 277.
5) R. W. Richardson and N. Sherman, Nuclear Phys. 52 (1964) 221.
6) R. W. Richardson and N. Sherman, Nuclear Phys. 52 (1963) 253.
7) R. W. Richardson, J. Math. Phys. 6 (1965) 1034.
8) R. W. Richardson, J. Math. Phys. 9 (1968) 1327.