

# 物質に働く電磁力と電磁エネルギーの 正しい理解について

東京大学 理学部 飯田修一

( 8月20日 受理 )

## I 古典電磁気学的導出

- § 1. 序
- § 2. 電気二重極および磁気能率に対する電磁力の基本的考え方
- § 3. マックスウェル-ローレンツ方程式とマックスウェル方程式
- § 4. 電媒質物体に対するマックスウェル-テンソル, マックスウェル-ローレンツ-テンソル
- § 5. 電気分極あるいは磁化した物質の表面に働く負表面張力と物質中のマックスウェルのテンソルの最終形
- § 6. 体積力, ポテンシャル力, 圧力による力と平衡関係式

## II 微視的構造よりの検証

- § 7. 誘起電気二重極に働く力とそのエネルギー関係式
- § 8. マックスウェル-ローレンツモデルによる電媒質流体中の電磁力の解析 ( 電歪現象との相関 )

## I 古典電磁気学的導出

### § 1. 序

真空中の電磁気学は比較的理解し易いが, 物質が関係すると事情は複雑となる。特に力とエネルギー授受の関係を正確に理解することは現在一般的常識としては完成していない。歴史的には, 連続体の古典電磁気学が略完成したと考えられ, 多くの教科書が執筆された後で, 物質の正確な構造が把握されるという不幸な事情が存在し, その為多くの誤解が世界に常識化することとなり, MKSA 単位系の使用も, その誤解に拍車をかけた結果となっていると考える。

これから常(強)磁性体( $\mu > 1$ ), 反磁性体( $\mu < 1$ )を含む電媒質に対する電磁力と電

飯田修一

磁エネルギーの物理学的構造を説明するが、読者は既成の概念に捉われず、虚心に記述を追い、物理学的本質を理解していただきたい。\*特に物質の電磁気学で仮定することが一般化している。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

の関係式は、あくまで近似式であって、物質中のエネルギーと物質素片に働く力を問題とする際には慎重に使用しなければならない。これから導出されるエネルギー関係式

$$\int \epsilon \frac{\mathbf{E}^2}{2} dV$$

$$\int \mu \frac{\mathbf{H}^2}{2} dV$$

は、物質内の非電磁気学的なポテンシャルエネルギーを含むものであって、 $\epsilon$ 、 $\mu$ が物質の各部分で一定であり、その場所場所で時間的に変化がなければ、全エネルギーの中から必要部分だけを取り出したものとして使用が可能であるが、密度の変化等が伴われる場合にはそのまま使用すると誤解に導き易いのである。

尚、式を簡素化し、物理の本質の理解に便利なよう記述はMK S 有理化対称単位系（略してMK SP，PはPhysicalの意）で行う。

## § 2. 電気二重極および磁気能率に対する電磁力の基本的な考え方

物質に作用する電磁力の基本は、電場中の電荷に作用するクーロン力と、磁場中を運動する電荷に作用するローレンツ力である。この二つの力は相対性理論の要請にも耐えた基本的なもので、<sup>(1),(2)</sup> 真空中では

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + \frac{Q\mathbf{v} + \mathbf{H}}{c} \quad (1)$$

---

\* Panofsky & Phillips, Stratton, Landau-Lifshitz 等多くの電磁気学に対する名著も本文の問題点に関し、論理的問題点がある。従って本文に述べる内容の多くは著者による全く新しい本質の解明になっていると考える。

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解についてと示される。尚、電磁気学の全体は相対論的に不変に構成されねばならないが、力やエネルギーは他の慣性系では異なる値に変換されることは注意を要する。勿論われわれは、われわれの大地に対し固定した座標系から見た力やエネルギーに関心がある。従って考える物質も、その全体はわれわれの座標系で静止しているものとする。尚、ローレンツ力は電流に対して

$$\mathbf{F}_{\Delta l} = \frac{I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{H}}{c} \quad (2)$$

となる。 $\Delta l$  は力を計算する対象とした電流経路の一部 (図1) である。ここで  $\mathbf{B}$  でなく  $\mathbf{H}$  を使用していることは、今ローレンツ力を真空中でしか考えていないことを示している。

さて静止している電気二重極

$$\mathbf{P} = Q \mathbf{l} \quad (3)$$

(図2) に対する電磁力は簡単であって、クーロン力だけであり

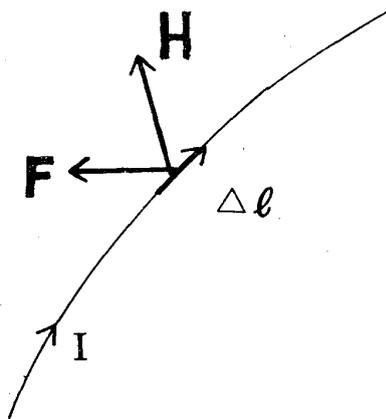


図1 電流に働く力

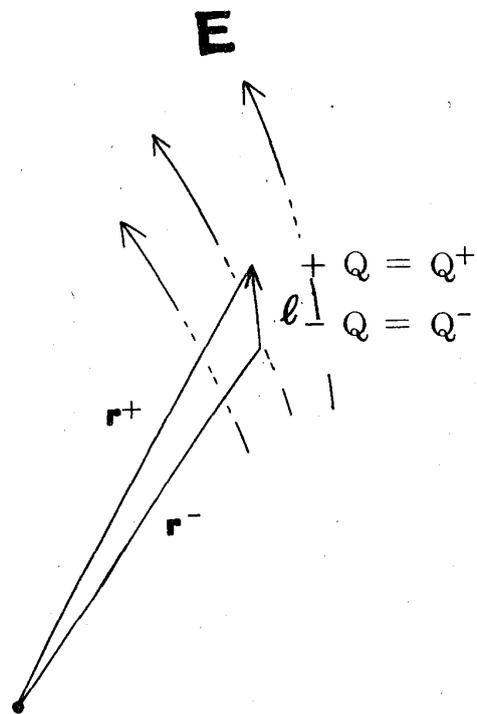


図2 電気二重極に働く力

飯田修一

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= Q^+ \mathbf{E}(\mathbf{r}^+) + Q^- \mathbf{E}(\mathbf{r}^-) \\
 &= Q [\mathbf{E}(\mathbf{r}^+) - \mathbf{E}(\mathbf{r}^-)] \\
 &= Q (\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}_p)
 \end{aligned} \tag{4}$$

となる。ただし  $\mathbf{r}_p$  は  $(\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^-)/2$  と書けば丁寧であるが、 $\mathbf{r}^+$  でも  $\mathbf{r}^-$  でも差支えないと考えた近似である。これを書き換えて

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}_p) \tag{5}$$

と書くのが普通である。

次に静止している磁気能率

$$\mu = \frac{I \mathbf{S}}{c} \tag{6}$$

(図3) に対する電磁力は、ローレンツ力だけであって、

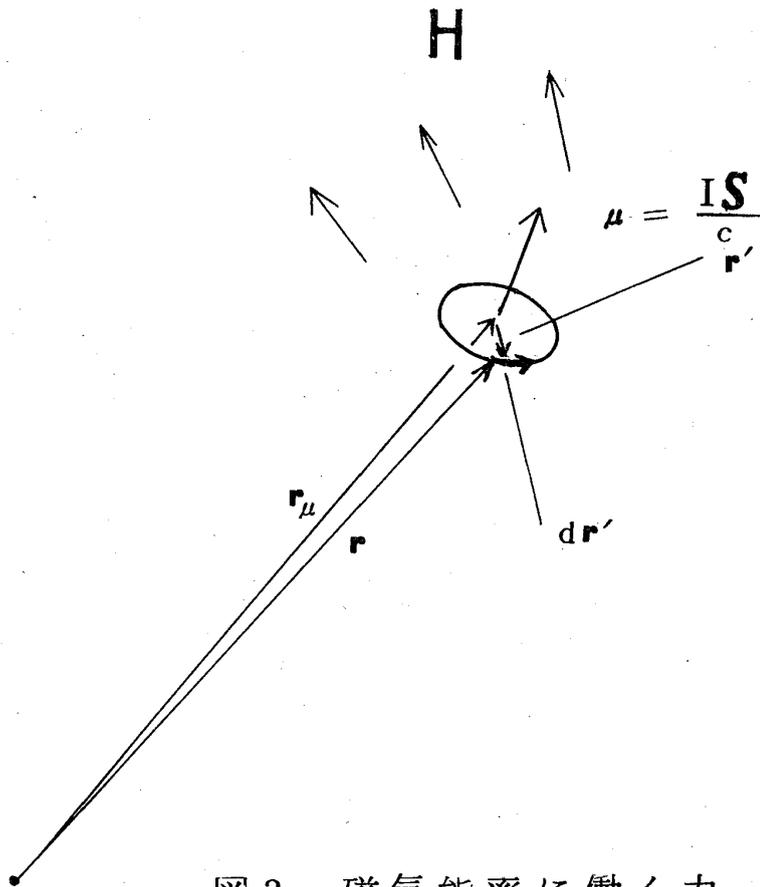


図3 磁気能率に働く力

$$\mathbf{F}_\mu = - \oint \frac{I}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r}' \quad (7)$$

である。ただし  $I$  は磁気能率を構成する永久電流 (persistent current) の大きさ,  $d\mathbf{r}'$  はその線路に沿った微小距離ベクトル,  $\mathbf{S}$  はその線路で囲まれた面積のベクトルであって, その着目点へのベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_\mu + \mathbf{r}' \\ d\mathbf{r} &= d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (8)$$

である。ただし  $\mathbf{r}_\mu$  は永久電流回路の中心への位置ベクトルである。磁気能率をすべて永久電流と考えることが出来るかどうかは, 重大な本稿の本質的基底に存在する問題である。この点に関し最大のポイントは電子のスピン磁気能率である。しかし既に実験的には確立されたものとして, 電子の磁気能率は電流的な起源であるということが出来る。<sup>(3)</sup> 筆者の最近の研究によれば<sup>(4), (5), (6), (7)</sup> 電子自身コンプトン波長の倍程度の半径の永久電流そのものと考えることが可能であることが判ったが, 本稿ではそこ迄の詳細は必要ではない。さて

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}_\mu + \mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{r}_\mu) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{r}_\mu) \quad (9)$$

と考え, ベクトル関係式を使用して,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\mu &= - \frac{I}{c} \oint [\mathbf{H}(\mathbf{r}_\mu) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{r}_\mu)] \times \left( \frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu} \times \mathbf{r}' \right) d\varphi \\ &= - \frac{IS}{c} \left[ (\nabla \cdot \mathbf{H}) \frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu} - \nabla(\mathbf{H} \cdot \frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu}) \right] \\ &= \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$= (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \boldsymbol{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (11)$$

となる。 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  は真空中では当然である。式(10)あるいは(11)が真空中の磁気能率に作用する力の基本的関係式である。式(5)と相似になるためには、

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (12)$$

でなければならないが, これはマックスウェルの式からは, 電流  $\mathbf{j}$  と電場の時間変化

飯田修一

$\partial \mathbf{E} / \partial t$  が零でなければ成立しない。これは電気二重極と磁気能率が、それぞれ電場および磁場から受ける力の間の重要な相違点で、このことを忘れると誤った結果になる場合がある。ついでにトルクは、電気二重極の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_p &= \mathbf{r}^+ \times Q^+ \mathbf{E}(\mathbf{r}^+) + \mathbf{r}^- \times Q^- \mathbf{E}(\mathbf{r}^-) \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_p) + \mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_p \end{aligned} \quad (13)$$

磁気能率の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\mu &= \oint \mathbf{r} \times \left[ -\frac{I \mathbf{H}(\mathbf{r})}{c} \times d\mathbf{r}' \right] \\ &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_\mu) + \mathbf{r}_\mu \times \mathbf{F}_\mu \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

### § 3. マックスウェル-ローレンツの方程式とマックスウェルの方程式

マックスウェルの古典電磁気学の方程式は巨視的な電磁量を取扱い、連続体媒質の考え方に立っている。しかしながら、近代物理学の進展によって微視的なマックスウェル-ローレンツの方程式の存在が実証され、微視的量の平均としてのマックスウェル方程式の意義も明確化されるようになった。<sup>(8), (9), (1)</sup> マックスウェル-ローレンツ方程式の重要な意義は、その中では力、エネルギー、運動量等の物理量が厳密に定義され、その授受の関係が明らかになるということである。物質中の電磁気現象におけるエネルギー、運動量、力等の授受関係は、従ってマックスウェル-ローレンツの方程式に根拠を置いて初めて正しく明確に理解されるものということができる。

普通にかかれるマックスウェル-ローレンツ方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= 0 & \text{(I),} & \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 & \text{(III),} \\ \nabla \times \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= \frac{\rho}{c} \mathbf{v} & \text{(II),} & \quad \nabla \cdot \mathbf{e} = \rho & \text{(IV),} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。これは物質の微視的構造を記述するものであって、世界は真空であり、その中に電荷の位置に  $\delta$  関数的になっている電荷分布密度関数  $\rho(\mathbf{r})$  と、その速度  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  で示される実体だけが物質であり、あとは真空中の電場  $\mathbf{e}$  と磁場  $\mathbf{h}$  がある。 $\mathbf{e}$  と  $\mathbf{h}$  は当然原子的

尺度で変動し、又時間的にも細かくゆれていると考えるのである。筆者は(15)式を更に次のようにも変形して考えておく方が数学的に取扱い易いと考えている。既に

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{c} + \sum_\lambda \frac{\mathbf{l}_\lambda^\mu}{c}, & \nabla \cdot \mathbf{e} &= \sum_i q_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに  $q_i(\mathbf{r}) = q_i^0 \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  は  $q_i^0$  の電荷を持ち、一点  $\mathbf{r}_i$  に存在し、速度  $\mathbf{v}_i$  で動いている電荷であり、 $\mathbf{l}_\lambda^\mu$  は、無限小の断面積の小さな円形リング上でのみ値を持つ永久電流を示すところの、リング状の一種の  $\delta$  関数であると考えているのである。

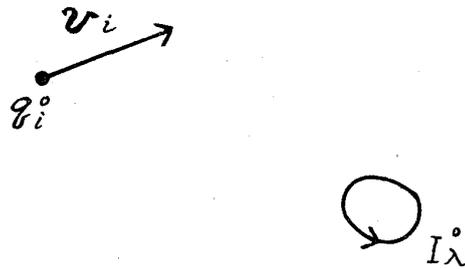


図4  $q_i^0$  と  $I_\lambda^\mu$  によるマックスウェル-ローレンツの微視的世界像

こうすると、無限小体積の  $q_i^0$ 、 $\mathbf{l}_\lambda^\mu$  の存在場所を除いて、世界はいたるところ真空であり、微少な電場  $\mathbf{e}$ 、磁場  $\mathbf{h}$  が完全に頭の上では定義できることになる。 $\mathbf{l}_\lambda^\mu$  によって電子のスピン運動に伴う磁気能率も含めて表現していることに注意してほしい。連続的な定常電流  $\mathbf{l}_\lambda^\mu$  のイメージは輻射を伴わない電荷の運動としてスピン磁気能率等磁化の起源を古典的に把握するためにはどうしても必要な概念であり、その正当性は十分に根拠づけられる。

勿論こうした世界は量子論でのみ完全な(?)理解ができるものであるから、以上の仮定に加えて、各  $q_i$ 、 $\mathbf{l}_\lambda^\mu$  は別に電磁気学的ではない第三の力によって、適当な場所、あるいは適当な運動を行うことを拘束されていると考える。しかしこうした拘束の詳細は、電磁力及び電磁エネルギー授受の関係の記述するのに、明確化する必要はないと考えるのがマ

飯田修一

ックスウェル-ローレンツの立場であり、量子力学による物質構造記述の結論に一致する考え方になっている。

こうした考え方に立った上で、更に表現の便宜上、再び(15式の形に書き方だけを戻すと、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= \frac{\rho'}{c} \mathbf{v}' + \frac{\mathbf{l}^\mu}{c} & \nabla \cdot \mathbf{e} &= \rho' \end{aligned} \quad (17)$$

となる。 $\mathbf{l}^\mu$  が  $\nabla \cdot \mathbf{e} = \rho'$  の  $\rho'$  の Origin になっていることは十分あり得るが、考え方としては分離しておく。これは例えば  $\mathbf{l}^\mu$  は正負の連続電荷が丁度逆向きに回転していると考えれば矛盾のないモデルになる。

これから式(15), (16), (17) は完全に同一現象の異なる表現に過ぎないと考える。そうして場合により便利なものを使うことにする。物理的イメージとしては式(16)が良く、微分等を行う数学計算には式(15)が便利であろう。

さてこれらの式を巨視的には十分小さく、微視的には十分大きい領域で平均するとマックスウェルの巨視的方程式になると考えるのが、ローレンツの立場であり、それは成功して物理学的に確立されていると考えることができる。すなわち式(17)から、

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{e}} &= \mathbf{E}, & \overline{\mathbf{h}} &= \mathbf{B}, \\ \overline{\frac{\rho'}{c} \mathbf{v}'} &= \overline{\left( \frac{\rho'}{c} \mathbf{v}' \right)}_{\text{free}} + \overline{\left( \frac{\rho'}{c} \mathbf{v}' \right)}_{\text{bind}} = \frac{\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \overline{\frac{\mathbf{l}^\mu}{c}} &= \nabla \times \mathbf{M}, & \overline{\rho'} &= \overline{\rho'}_{\text{free}} - \nabla \cdot \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。ここに  $\overline{\quad}$  は上の意味の平均を、free は自由に動く自由電荷を、bind は原子、分子に拘束された拘束電荷を示す。\*

\* この区別は実際の物質ではあいまいになる場合も多い。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i (Q_i^+ \mathbf{r}_i^+ + Q_i^- \mathbf{r}_i^-) = \sum_i Q_i^+ (\mathbf{r}_i^+ - \mathbf{r}_i^-) \\ \mathbf{M} &= \sum_\lambda \boldsymbol{\mu}_\lambda = \sum_\lambda \frac{I_\lambda^\mu \mathbf{S}_\lambda}{c} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であって、 $\Sigma$  は各単位体積中の和である。 $\mathbf{S}_\lambda$  は永久電流  $I_\lambda$  の囲む面積のベクトルである。注意すべきこととして、平均操作 $\bar{\quad}$ は全く無作為的に数学的に行われるが、その際電気分極の原因である電気二重極  $\mathbf{p}_i$  を構成する電荷  $Q_i^+$ 、 $Q_i^-$  や、磁気能率  $\mu_\lambda$  の担い手である永久電流  $I_\lambda$  などを、その平均操作の境界面で遠慮なく切ることも許して平均を取っている。図5、6の実線が、こうした数学的な無作為な平均領域の取り方を示す。平均は任意の体積  $\Delta V_0$  に対して

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\Delta V_0} \iiint_{\Delta V_0} \xi \, dV$$

といった形で行われる訳である。ある場合には任意の面積上  $\Delta S_0$  上で平均することも数学的な手段として便宜上使ってもよいであろう。式(18)はこうした際に領域  $\Delta V_0$  の境界は全く無作為であることを前提としているのである。無作為でない対照的な方法は  $\Delta V_0$  の領域を電気二重極や磁気能率を注意して切らないようにし、全く取り込んだものと外にあるものと完全に分離するような境界を持つものにするのであって、図5、6に点線で示している。この方法は前者が数学的無作為であるのに対し、慎重に物質を区別したものである。本文の後半においては領域は殆んど常に後者の形式で取ることになる。又(18)式において、二つの方法の差があらわれるのは  $\bar{I}^\mu/c$  と、 $\bar{\rho}'$  の場合だけであって、後者の領域で平均すると

$$\frac{\bar{I}^\mu \text{Mat}}{c} = 0, \quad \bar{\rho}' \text{Mat} = \bar{\rho}' \text{ free} \quad (20)$$

となる。 $\text{Mat}$  は物質 (Matter) の略である。

この結果

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{\mathbf{j}}{c} & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{true}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

飯田修一

が得られる。ただし

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

は(21)式に新しく導入されているが、これがマックスウェルの古典電磁気学方程式の $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D}$ に正しく対応することが証明されるのである。

(17)式より(21)式を数学的に厳密に導出することは相当複雑なので省略する。しかしこうしてマックスウェルの古典的巨視的電磁気量に厳密な微視的描像が得られたのである。

マックスウェル-ローレンツの世界の今一つの重要な結論は

$$\frac{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2}{2} \cdot \Delta V \quad (22)$$

に対し、 $\Delta V$ の体積中の電磁エネルギーの密度という明解な解釈をすることができるということである。これは巨視的量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ にない関係式であって、物質中の巨視量

$$\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2} \cdot \Delta V \quad (23)$$

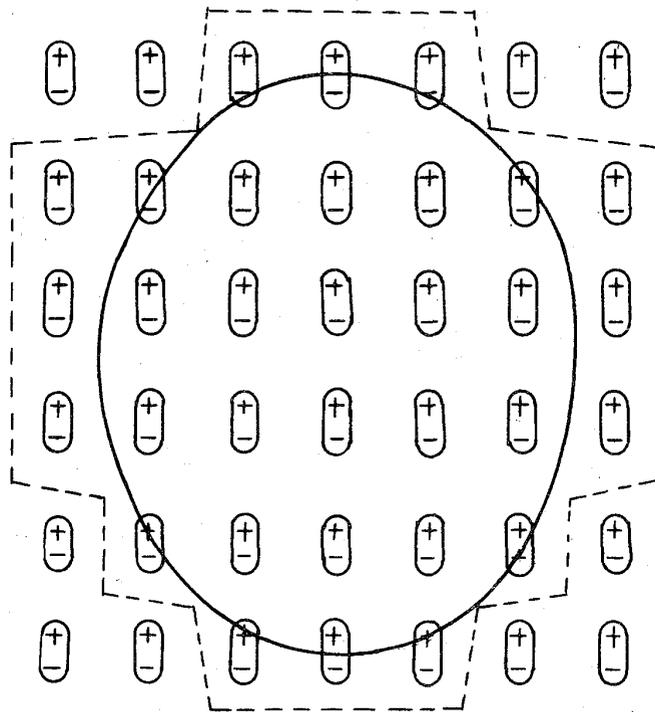


図5 電気二重極群に対する平均操作領域の二つの取り方

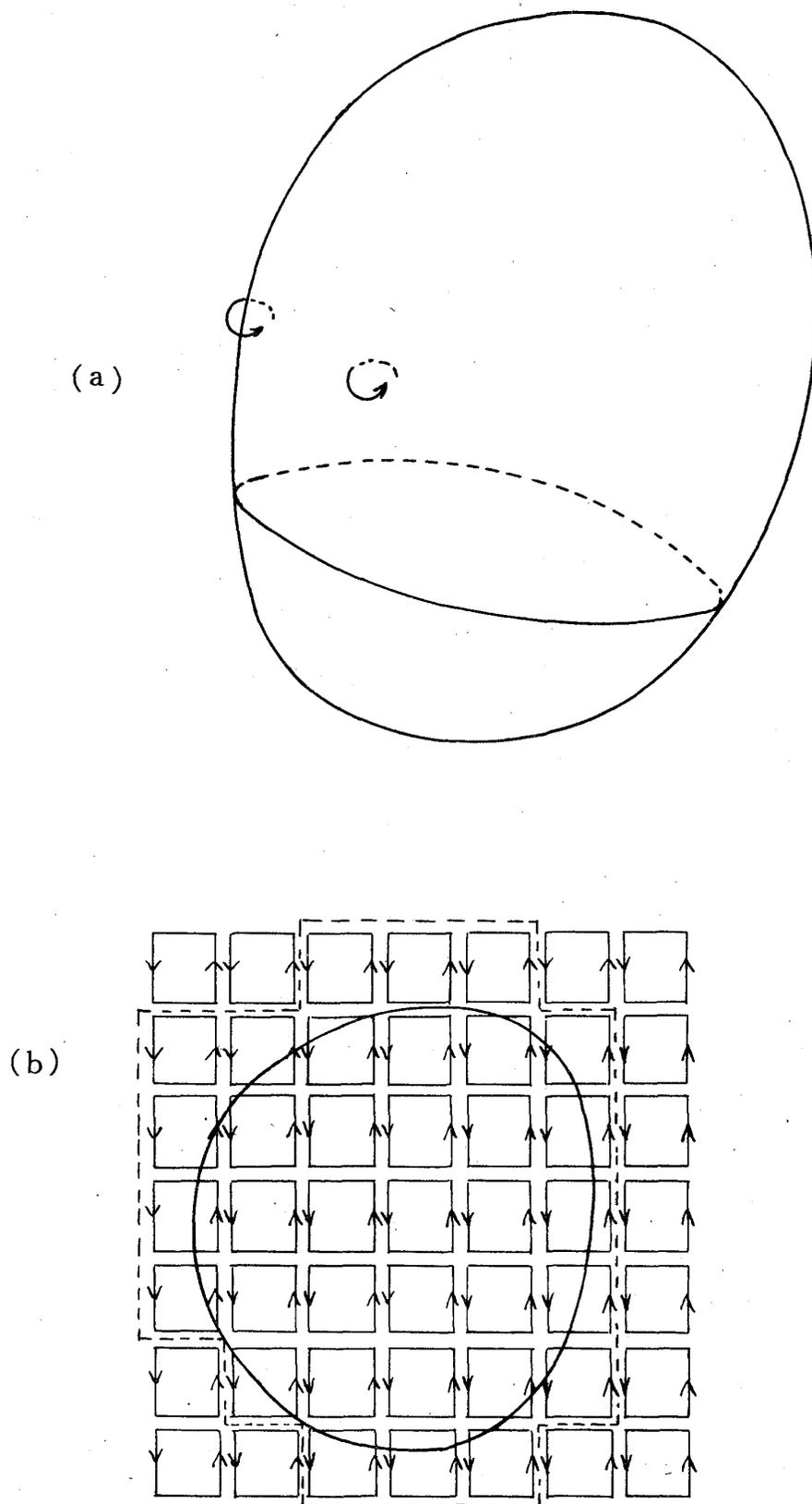


図6 磁気能率に対する平均操作領域の取り方

の物理的意味は、非常に慎重な考究の末、初めて意味が与えられるものであり、ここではエネルギーの次元を持つ何か以上のことは言えないことを注意しよう。

#### § 4. 電媒質物体に対するマックスウェル-テンソルおよびマックスウェル-ローレンツ-テンソル

さて物質に対して電磁場が作用する力学的な力はマックスウェルのテンソルの考え方によって見事に表現できる。<sup>(1), (10), (11), (12), (13), (14)</sup> 真空中におけるマックスウェルのテンソルは

$$T_{ij} = E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k E_k^2 + H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k H_k^2 \quad (24)$$

であって、図7に示したような物質  $V_0$  があつたとき、それを完全に囲む真空空間の閉曲面  $S$  で、このテンソルを積分して

$$\mathbf{F} = \iint_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(\mathbf{F}_i) = \left( \iint_S \sum_j T_{ij} dS_j \right) \quad (25)$$

の主要項は物質  $V_0$  が、電磁場から受ける力の総計を示す。

この帰結は甚だ厳密なものである。マックスウェル-ローレンツ式(17)を使うと、各微視的電荷と電流に作用するローレンツ力式(1)丈を仮定した上で、マックスウェル-ローレンツのテンソル

$$t_{ij} = e_i e_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k e_k^2 + h_i h_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k h_k^2 \quad (26)$$

を任意の閉曲面  $S$  で積分して

$$\mathbf{F}_{M-L} = \iint_S \mathbf{t} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V_0} \left[ \rho \mathbf{e} + \frac{\rho \mathbf{v}}{c} \times \mathbf{h} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{h}}{c} \right) \right] dV \quad (27)$$

が得られることが厳密に導出される。(25)式はテンソル的には力の相和という解釈で出発したが(27)式の結果から  $\mathbf{F}_{M-L}$  は閉曲面  $S$  中の物質の運動量の時間変化の総量を示すと

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解について  
 いう解釈が一般に記載されている。最後の項は微視的な Poynting の Radiation の  
 Vector の時間変化であって、輻射の運動量の時間変化と考えられたからである。勿論  
 この項は通常の状態では甚だ小さい。しかしながら物質中での Poynting Vector を輻  
 射の運動量と考えることは根拠がない。<sup>(15), (16), (17), (18), (19)</sup> 従って、(27)式はむしろ物質に働  
 く総力  $\mathbf{F}^{me}$  ( $me = \text{mechanical}$ ) が、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{me} &= \iiint_{V_0} \left[ \rho \mathbf{e} + \frac{\rho \mathbf{v}}{c} \times \mathbf{h} \right] dV \\ &= \iint_S \mathbf{t} \, d\mathbf{S} - \iiint_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{h}}{c} \right) dV \end{aligned} \quad (27)'$$

と与えられると解釈すべきものと筆者は考える。<sup>(20)</sup> さて今  $S$  として、図 7 の  $S$  を取ると、  
 ローレンツの微視的電磁場  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  は物質  $V_0$  の外部では

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{H}$$

になる。それは微視的電磁場  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  が物質中で持っている急速に変化している（空間的  
 にも時間的にも）揺動は、物質  $V_0$  の外部では、急速に減衰してマックスウエルの巨視  
 的電磁場の値に収斂するからである。したがって、図 5 の面  $S$  の上では

$$t_{ij} = T_{ij} \quad (28)$$

が保証されるのである。

物質中においてマックスウエルのテンソルが定義できるか否かは重要な点である。たとえ

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (29)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (30)$$

と仮定できる場合でも、単純に式(24)の拡張として

$$T_{ij}^* = \epsilon E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k \epsilon E_k^2 + \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k \mu H_k^2 \quad (31)$$

飯田修一

とおくことは物理学的に根拠はない。\*

物質中のマックスウェルのテンソルの正しい表現は次のようにして得られると筆者は考える。今図8において、物質  $V_0$  中、任意の体積  $V$  に著目し、その中の物質に働く電磁力の総和を求めよう。そのために、 $V$  を囲む面積  $S$  から、その面の内外に接触している物質の薄層を取り出して、厚さ  $d$  の真空の空隙  $V_d^S$  を造る。  $V_d^S$  は面  $S$  を中心に含んだ閉曲面殻であって、  $d \rightarrow 0$  で物質は元に戻る。  $V_d^S$  の境界は前章で  $= \text{Mat}$  とした時の境界面である。

マックスウェルの巨視的電磁気現象の大きい特徴は、その全体系が、こうした真空の無限小厚の空隙の存在に対して不変であるように構成されていることにある。この空隙  $V_d^S$  の境界面は前章で述べたところの、物質を注意して区別して造られた領域の境界で

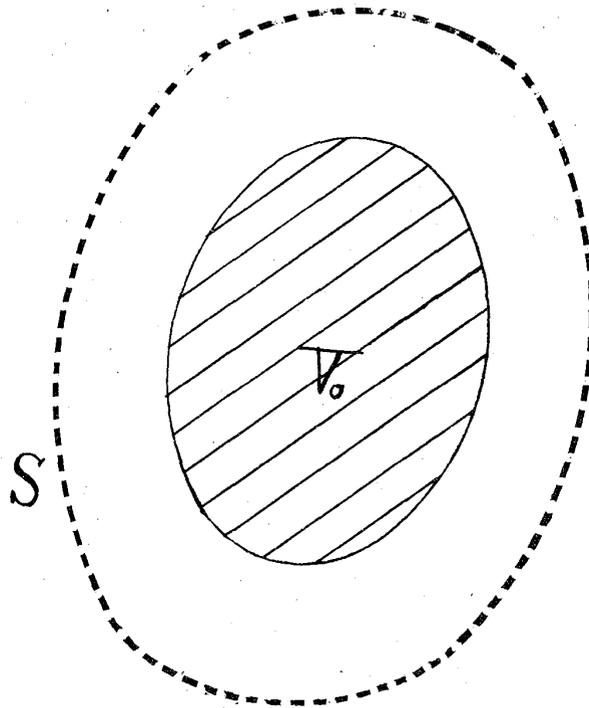


図7 物質  $V_0$  とそれを囲む真空空間の閉面  $S$

\* 既存の電磁気学の教科書が取扱っている限りでこの過ちを犯していると考え。Stratton, Panofsky-Philips等の教科書がそうである。物質中のMaxwellの正しいテンソル、従って物質に働く力の正しい表現は次に導かれる。

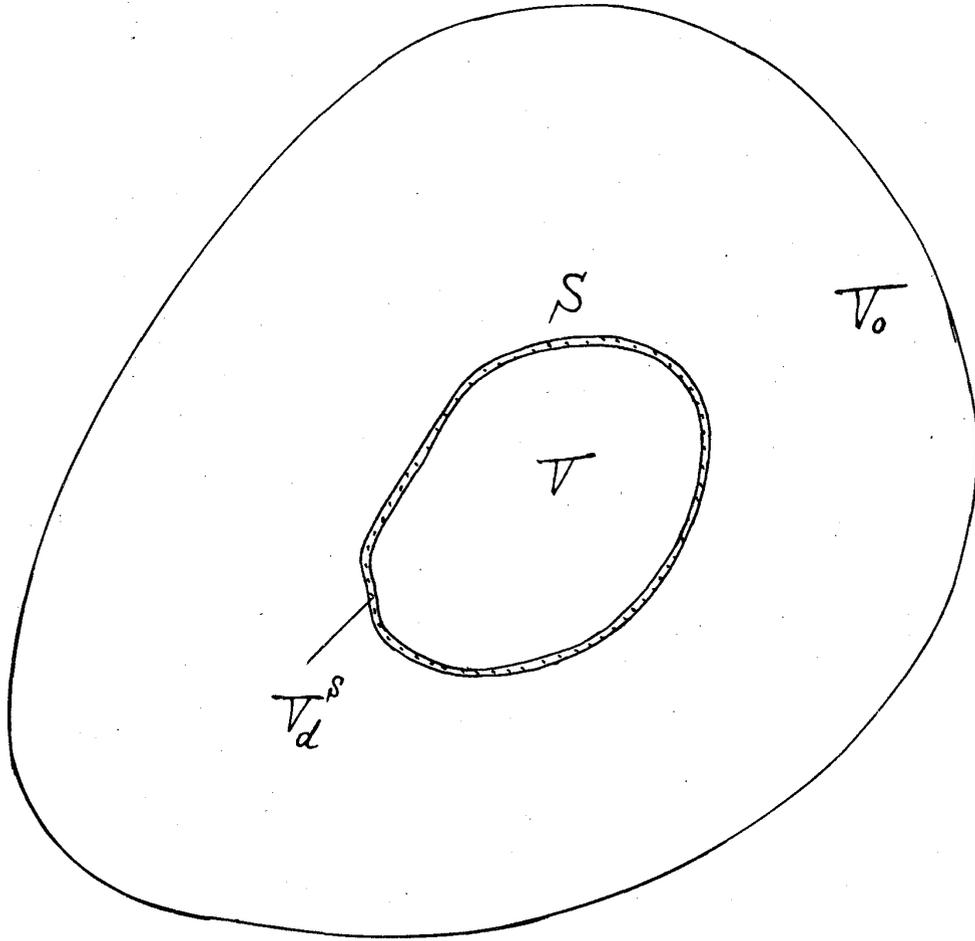


図 8 物質  $V_0$  中の任意の体質  $V$  と、それを囲む面  $S$  および、 $S$  を含む薄い面殻  $V_d^s$

あって、図 9 に示されるように電気分極  $\mathbf{P}$  が存在すると分極電荷

$$\sigma_P = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) = P_n$$

が両面にあらわれる。ただし  $\mathbf{n}$  は面の法線であり、 $\sigma$  は電荷の面密度である。その結果空隙内の電場  $\mathbf{E}^*$  は

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + P_n \mathbf{n} \tag{32}$$

磁気能率の起源は永久電流であるから、磁極というものは実証ではない。<sup>(21), (22)</sup> しかしながら磁場  $\mathbf{H}$  に関する限り、電場  $\mathbf{E}$  と全く同様に、仮定の磁極  $\sigma_M$  と、それから導出されるポテンシャル  $\varphi_M$  の勾配  $-\nabla \varphi_M$  として、磁化  $\mathbf{M}$  に起因する磁場  $\mathbf{H}_M$  が発生していると考えerことは正しいことが証明される。

飯田修一

と変化する。又磁化 $\mathbf{M}$ に関しても同様に、あたかも磁極

$$\sigma_M = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) = M_n \quad (33)$$

が出現したのと同様な磁場 $\mathbf{H}^+$

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H} + M_n \mathbf{n} \quad (34)$$

が存在することになる。(前頁脚注参照)

しかしながら図9からあきらかな通り、この $\sigma_p$ 、 $\sigma_M$ の影響は空隙の外では無限小であって外に影響を与えない。これは当然であって、物質の構造によっては分子と分子の間に実際こうした空隙が至るところ実在しておることが可能であり、そうした物質に

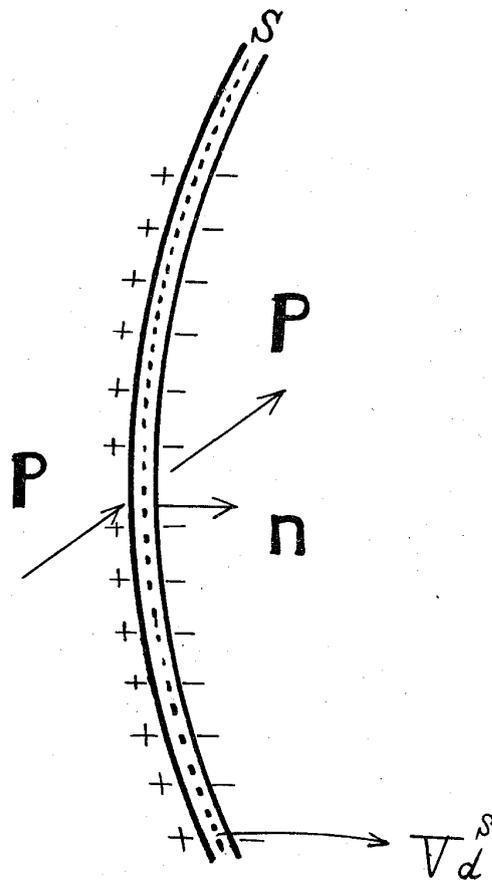


図9 電気分極 $\mathbf{P}$ により空隙 $V_d^s$ の両面に現れる電荷

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解について

対しても変りなく巨視的なマックスウェル方程式。式(21)が妥当することが、われわれの世界の構造なのである。尚、この空隙中には  $\mathbf{j}$  と  $\rho^{\text{true}}$  は自由に存在すると考える。しかしそれ以外は真空中で  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  の性質は保持されている。

さて既に述べたことにより、空隙  $V_d^S$  の中では、その中の閉曲面  $S$  が囲む物質  $V$  の中に働く電磁力の総計に関し、マックスウェル-ローレンツのテンソル式(26), 従って、その中で真空中のマックスウェルのテンソル(24)が適用できなければならない。

そのテンソルを  $T^*$  とすると(32), (34)式を考慮して

$$T_{ij}^* = T_{ij}^{*E} + T_{ij}^{*M} \quad (35)$$

$$T_{ij}^{*E} = (E_i + P_{ni})(E_j + P_{nj}) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k (E_k + P_{nk})^2 \quad (36)$$

$$T_{ij}^{*M} = (H_i + M_{ni})(H_j + M_{nj}) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k (H_k + M_{nk})^2 \quad (37)$$

がその表現であることがわかる。この  $T_{ij}^*$  から例えば

$$\begin{aligned} (\iint_S T_{ij}^{*E} d\mathbf{S}) &= \iint_S [(\mathbf{E} + \mathbf{P}_n) \{(\mathbf{E} + \mathbf{P}_n) \cdot d\mathbf{S}\} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{P}_n)^2 d\mathbf{S}] \quad (38) \\ &= \iint_S [\mathbf{E} (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) + \frac{P_n^2}{2} d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 d\mathbf{S}] \\ &= \iiint_V [(\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E}^2] dV + \iint_S \frac{P_n^2}{2} d\mathbf{S} \\ &= \iiint_V [\rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] dV + \iint_S \frac{P_n^2}{2} d\mathbf{S} \quad (39) \end{aligned}$$

同様に

$$(\iint_S T_{ij}^{*M} d\mathbf{S}) = \iiint_V [\nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}] dV + \iint_S \frac{M_n^2}{2} d\mathbf{S} \quad (40)$$

が導出される。(39), (40)の最後項の面積分は、空隙  $V_d^S$  を開けたことに帰因する逆表面張力であって、 $V_d^S$  の外側の面からは、之を正確に打ち消す力が働いていることは式(39)の導出過程から当然である。更にこの力は物質中には存在すると考えられないことが次章に示されるから考慮の外におく。そうすると物質中の体積力として(27)式から

$$\mathbf{F}^{me} = \iint_S \mathbf{T}^* d\mathbf{S} - \iint_S \frac{\mathbf{P}_n^2 + \mathbf{M}_n^2}{2} d\mathbf{S} - \iiint_V \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) dV \quad (41)$$

$$= \iiint_V \left[ \rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) + \frac{1}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}' \times \mathbf{h}') \right] dV \quad (41')$$

が結論される。(41)式の最後の項は(27)式から来たものである。(41)式の  $\mathbf{e}'$  と  $\mathbf{h}'$  は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e} &= \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{e}' = \mathbf{E} + \mathbf{e}', & \bar{\mathbf{e}} &= 0 \\ \mathbf{h} &= \bar{\mathbf{h}} + \mathbf{h}' = \mathbf{B} + \mathbf{h}', & \bar{\mathbf{h}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

として定義されたもので、Lorentz の微視的電磁場の平均値  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  よりの揺動である。Lorentz の電場と磁場は普通独立な別々の原因によって生じていると考えられるから、

$$\iiint_V \left[ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}' \times \mathbf{h}') \right] dV = 0$$

と考えるのが常識的な結論である。いずれにしても、定常状態では存在しないし、又大きい値ではない。 $\nabla^*$  は  $\nabla$  が  $\mathbf{H}$  にのみ作用することを示す記号である。

(42)式の表現は筆者が最もよく整理されたものとして選んだものであるが、磁気力  $\mathbf{F}^M$  がいくつかの書き方が可能である結果、他の表現も可能である。それらは

$\mathbf{F}^M$	{	=	$+\frac{1}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$	$+\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H})$	$+(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}$	(43)
		=	$+\frac{1}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$	$+\nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H})$		(44)
		=	$+\frac{1}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{M}$		$+(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}$	

といった形である。式の中の区分は数学的同等性を示している。

式(35)のマックスウェルのテンソルの表現は面の法線  $\mathbf{n}$  に関係しているから、普通の意味の応力テンソルではないことに注意する必要がある。この表現を(31)式のような純粋の物質中のテンソル形式に変換することが可能であり、それは次章に示される。

§ 5. 電気分極あるいは磁化した物質の表面に働く負表面張力と物質中の  
マックスウェルのテンソルの最終形

表面において、各電気二重極  $\mathbf{p}_i$  (或は各磁気能率  $\mu_i$ ) に働いている力を計算する方法は多少複雑である。式(41)の主要項

$$(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (46)$$

は誘電体中に  $\mathbf{P}$  に平行な細長い Needle を造ることにより、その Needle に対し、外場  $\mathbf{E}$  が働いているとして導出される。しかし、表面では Needle は表面と衝突して同様には言えない。

図 10 (a) にその状況を示す。今、面の法線方向を  $\xi$  とし、その面上に出来ている面電荷密度

$$\sigma = |\mathbf{P}_\xi| \quad (47)$$

の担い手である表面付近の電気二重極に働く力の相和を求める。図(b)に誘導体中  $\mathbf{P}$  に平行な Needle が、誘電体の表面にぶつかっている状況を示す。この Needle 状誘電体に外力として働く電場  $\mathbf{E}$  の  $\xi$  成分は、多分図(c)のような変化を示し、従って、Needle の電気分極  $\mathbf{P}$  は、同じく図(c)に示されているような形になるであろう。このことを考慮して式(46)を表面に近い小体積  $\Delta V$  (図(a)) で積分してみよう。

$$\begin{aligned} & \iiint (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} \, dV \\ &= \iiint [(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \nabla] \mathbf{E} \, dV \\ &= \iiint [(\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] \, dV \\ &= \iiint \left[ \left( D_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + D_\eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} + D_\zeta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right) - \left( E_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + E_\eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} + E_\zeta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right) \right] \, dV \quad (48) \end{aligned}$$

ただし、 $\eta$ ,  $\zeta$  は  $\xi$  に直交する二軸の座標である。

今、十分  $\xi$  方向に薄い膜として  $\Delta V$  を考えているとすると、 $\frac{\partial}{\partial \xi}$  以外の微分は通常値であって、体積分することにより微小量になるから、

$$= \iiint \left( D_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} - E_\xi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \right) \, dV \quad (49)$$

飯田修一

$D_\xi$ ,  $E_\eta$ ,  $E_\zeta$ が境界面で連続であることを考慮すると,

$$\begin{aligned}
 &= D_\xi \int_{-\Delta\xi_0}^{+\Delta\xi_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} d\xi \cdot \Delta \mathbf{S} - \int_{-\Delta\xi_0}^{+\Delta\xi_0} E_\xi \frac{\partial E_\xi}{\partial \xi} \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{S} \\
 &= D_\xi \cdot [\mathbf{E}]_{\text{内}}^{\text{外}} \cdot \Delta \mathbf{S} - \left[ \frac{E_\xi^2}{2} \right]_{\text{内}}^{\text{外}} \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{S} \\
 &= [D_\xi \cdot (E_\xi^{\text{外}} - E_\xi^{\text{内}})] - \frac{(E_\xi^{\text{外}} - E_\xi^{\text{内}})(E_\xi^{\text{外}} + E_\xi^{\text{内}})}{2} \cdot \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

$$E_\xi^{\text{外}} - E_\xi^{\text{内}} = P_\xi^{\text{内}} \quad D_\xi = E_\xi^{\text{内}} + P_\xi^{\text{内}}$$

$$= \frac{(P_\xi^{\text{内}})^2}{2} \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \tag{50}$$

従って単位面積当り

$$\mathbf{F} = \frac{(P_n)^2}{2} \tag{51}$$

の力が働いていることがわかる。磁気分極の場合も同様に考えて

$$\iiint \nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) dV \tag{52}$$

$$= \iiint [\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}] dV$$

$$= \iiint \left[ \mathbf{M} \times \left( \frac{\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV + \frac{(M_n^{\text{内}})^2}{2} \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \right] \tag{53}$$

となる。(53)式の第一項は不連続関数の微分ではないから、結局消えて、

$$\mathbf{F} = \frac{(M_n)^2}{2} \mathbf{n} \tag{54}$$

となる。

これらの力は物質を外側に引張っている。従って、負の表面張力による力に相当する。  
とにかく結果として表面には

$$\mathbf{F} = \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})}{2} \mathbf{P}_n + \frac{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})}{2} \mathbf{M}_n \quad (55)$$

の力が働いている。

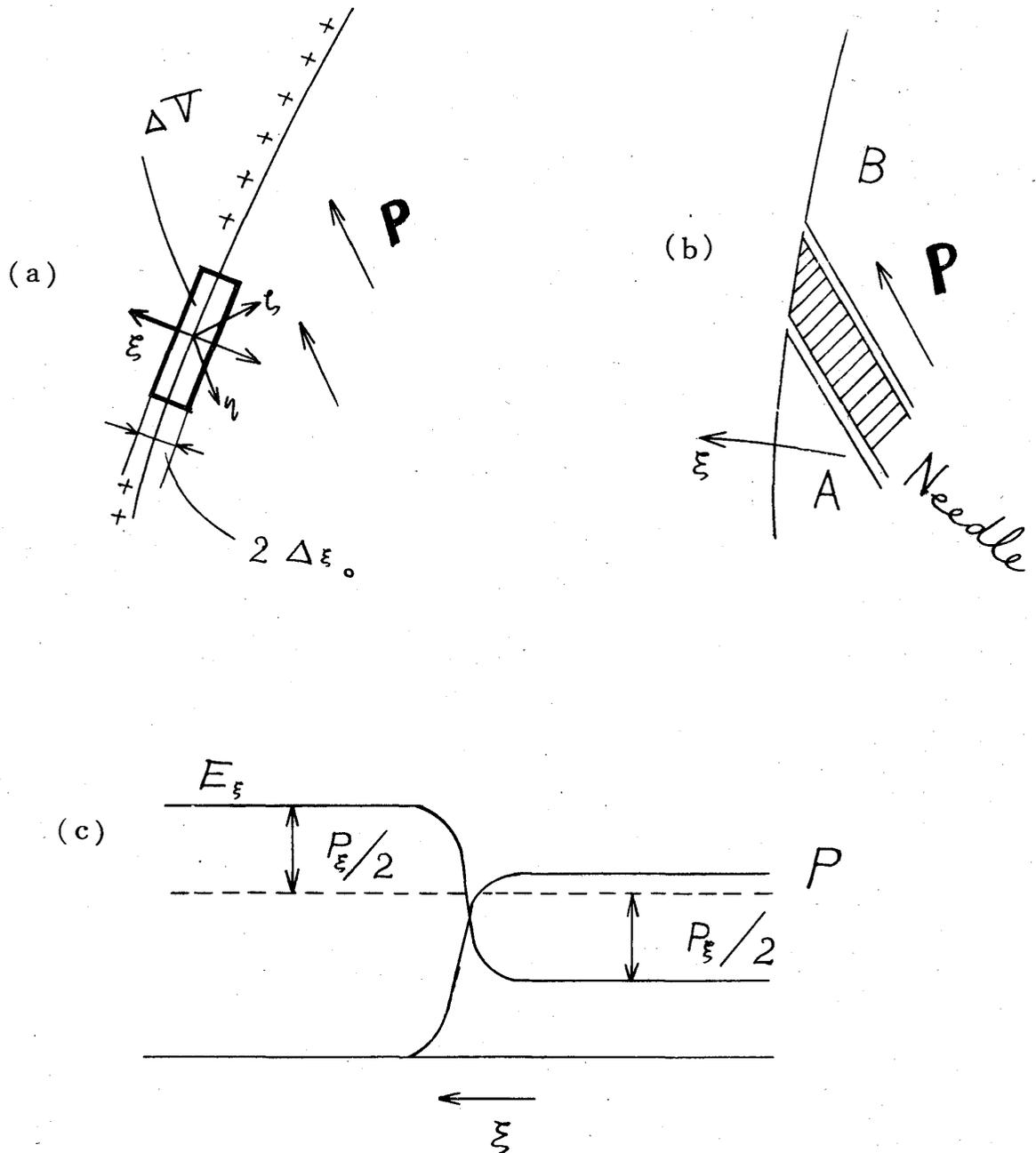


図 10 誘電体の表面に働く力の説明

以上の電磁力は電気分極あるいは磁化した物質の表面に必ず働いている。しかし図8の  $V$  の表面  $S$  にほんとうに働いているであろうか。この点の結論は連続媒質の考え方からは得られない。連続媒質の場合空隙はあくまで空隙であり、そこには図10(c)に示されたような急激な電場  $\mathbf{E}$  の変化があり、(b)に示したような Needle の尖端部分は、それに外部から働く有効電場に、(c)のように急激な変化があつて、(46)式の値が表面付近の積分後残ることになったのである。ところが実際の物質は図11に示したように不連続構造をもっており、その空隙の中の  $\mathbf{E}$  は図11(a)→(b)に示したように空隙の巾が狭まるにつれて、自然に連続的に正常な変化しかしない  $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}$  に急速に収斂する。図11の下の曲線は  $\mathbf{E}_n$  の  $\mathbf{n}$  方向の変化を示したものである。従つて物質の内部の  $S$  の上には、式(55)の原因になった急激な電場の変化は全くないと考えねばならない。従つて、この項を(39)式から削除すると、(36)式の  $T_{ij}^{*E}$  としては

$$T_{ij}^{*E} = E_i E_j + E_i P_{nj} + P_{ni} E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k (E_k^2 + 2 E_k P_{nk}) \quad (56)$$

でよいことになり、

$$\begin{aligned} \iint T_{ij}^{*E} d\mathbf{S} &= \iint_S [\mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) + \mathbf{E} (\mathbf{P}_n \cdot d\mathbf{S}) + \mathbf{P}_n (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + 2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_n) d\mathbf{S}] \\ &= \iint_S [\mathbf{E} (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) - \frac{1}{2} E^2 d\mathbf{S}] \end{aligned} \quad (57)$$

から、更にマックスウェルのテンソルの  $\mathbf{E}$  成分として

$$T_{ij}^E = E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k E_k^2 \quad (58)$$

が、実効的には十分であることになる。\*すなわち物質中の厳密に一般的なマックスウェルのテンソルは

---

\* 式(58)の第二項が  $-\frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k E_k D_k$  でないことに特に注意してほしい。

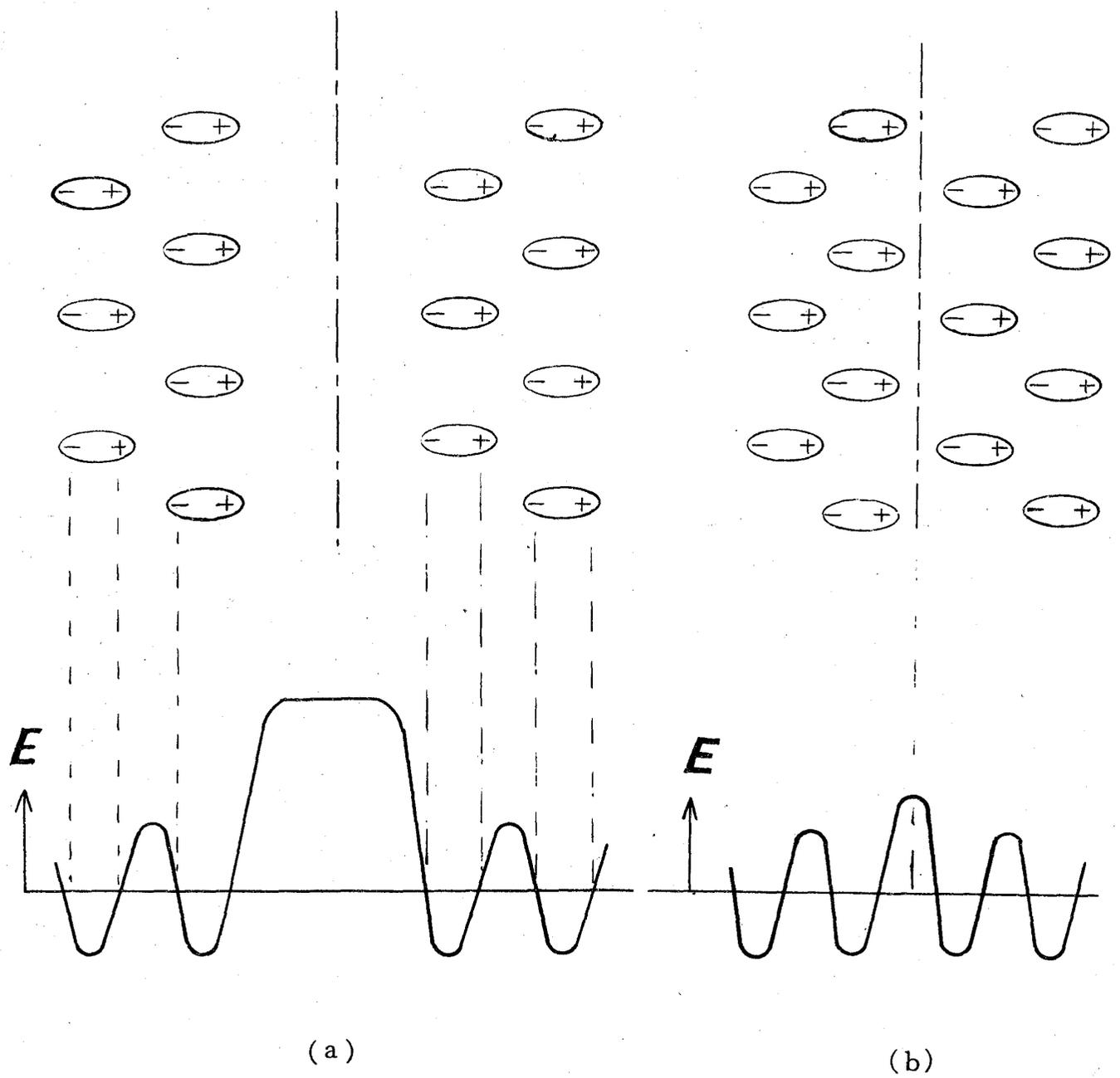


図 11 実際の物質において空隙の巾  $d$  を零に近づけたときの内部電場の平均値の変化

$$T_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k E_k^2 + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k H_k^2 \quad (59)$$

であって、その結果

$$\begin{aligned} \iint_S T_{ij} dS = \iiint_V \left[ \rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} + \nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] dV \end{aligned} \quad (60)$$

$$\mathbf{F}^{me} = \iint_S \mathbf{T} d\mathbf{S} - \iiint \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}' \times \mathbf{h}') \right] dV \quad (61)$$

が導出される。式(59)と式(60), (61)が  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  や  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  を仮定することなく、全く一般的に巨視的世界の厳密な関係式として導出されていることは特に注意したい。

### § 6. 体積力, ポテンシャル力, 圧力による力と平衡関係式

今から流体電媒質中での平衡関係式を求める。平衡状態では、流体中では体積力と圧力による表面力の総和が平衡しなければならない。即ち図8を使用して(60)式を使い、更に時間変化が緩慢で無視できるとして

$$\iiint_V \left[ \rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \right] dV = + \iint_S p d\mathbf{S} \quad (62)$$

この関係式は右辺を体積分に変えて

$$\rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) = + \nabla p \quad (63)$$

となる。換言すると、(63)式が成立するように流体の各部分に圧力  $p$  の分布が生じる。又、その際流体が圧縮性であって、 $\epsilon$ ,  $\mu$  が圧力  $p$  或は密度  $\tau$  の関数であると、それに対応した考慮を(62)式の解の計算の際に行わねばならないが、電磁力はあくまで左辺で体積力として与えられ、それは  $\epsilon - 1$ ,  $\mu - 1$  だけを含んで、 $\epsilon$ ,  $\mu$  の微分は含まないのである。

多くの教科書で電気力に関し、 $\tau$  を密度として物質の単位体積に働く電磁力として

$$\mathbf{F}_v^C = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla (E^2 \frac{d\epsilon}{d\tau} \tau) \quad (64)$$

という式が示されている。<sup>23, 24</sup> この式は(63)式と比較して一見して複雑であり物理性に甚だ疑問があることが推定されるが、物質の微視的構造の判らない時代に造られたものであって、ある特別な場合には(63)式の表現と一致することが示される。(63)式を変形して

$$\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \nabla^* (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) - \nabla p \quad (65)$$

とすると、 $\epsilon = \epsilon(\tau)$ が定義できた時にはこれは(63)式と

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v^C - \nabla p_0 \quad (66)$$

で一致する。但し、 $\nabla p_0$ の $p_0$ は“圧力相当量”であって、(63)式の $p$ と異なり、流体の各分子が、今考えている時点で存在した微視的状态、とくに、その電歪効果を、電場のある状態の儘固定した上で、電場を零に持って行った時に、仮想的にその場所に発生するであろう圧力という意味を持っている。勿論そういった量を直接測定するのは不可能であるから、(64)式を理解することは容易ではない。この間の事情は更に後程詳しく説明されるが、(64)式が、(65)式に比し甚だ不適当な表現であることが判るであろう。(65)式は完全に一般式であって、たとえ、 $\epsilon$ 、 $\mu$ がヒステレシスを持っても差支えなく成立するのである。

勿論(63)式の解を完全に具体的に得るには電媒質の実際の表面に働く負表面張力による力式(55)や、大気圧更に重力等も考える必要があるだろう。しかし物質の微小部分に関する限り、電気力は(63)式の左辺で与えられ、又圧力の場所による微小変化に関する限り(63)式で表現されるわけである。(重力等のポテンシャル力は勿論(63)式の左辺に加えればよい。)

なお英文発表として Ref. (25)があるが、多少のミスもあり、本稿の解説が完全と考える。

## II. 微視的構造よりの検証

### § 7. 誘起電気二重極に働く力とそのエネルギー関係式

これから  $\mathbf{H}=0$  として、電気力のみを考える。

誘電体中には電場に respond して電気二重極を発生させる分子、原子、その他の構造がある。その微視的内容を知ることは誘電体に働く力を解析し理解する上で必要である。

まづ物質を、 $\mathbf{E}=0$  では、電荷分布が微視的にも十分対称的であって、電気二重極の存在を微視的にも考える必要のない場合、(A)、と、微視的には電気二重極の存在が考えられるが、全体として  $\mathbf{E}=0$  では平均的には電気分極があらわれない場合、(B)、の二種に分類できる。(B) の場合は温度により強誘電体、反強誘電体などになる場合が多いから、一応ここでの対象から外す。しかし(B)の場合でも本章の議論は適当な考慮の末適用できることが注意される。

さて、(A) の場合、次の重要な物理的事実が指摘できる。それは、

電気分極してできた電気二重極の最小単位的なものの一つを取り出して、その二つの電荷を  $Q^+$ 、 $Q^-$  とするとき、 $Q^+$ 、 $Q^-$  は平均として、相互には電場を作用させていないと考えることができる。

ということである。この考え方の最も簡単な例を図12に示す。図12は原子又はイオンの分極の場合であり、(a)は分極前で、中心に正の原子核、周りに負の電子が廻っている。量子論により、電子の分布は球対称であって、その場合中心には電場の平均値は零となる。又更に電場  $\mathbf{E}$  が印加されて、多少の変位が起こったとしても、図(b)に示したように(この図では正電荷のみ移動させているが、これで十分なことは自明であろう。)電子の分布の大部分が、原子核の移動域の外にあると、「球殻状電荷分布の内部の電場は零」という静電気学の法則によって、電場の平均は零となる。

実際は正電荷である原子核と、負電荷である電子とはイオン・コア—その他の関係で一体であり図13(a),(b)に示したような形がより現実に近いであろう。しかしこの場合でも(b)に示した各正及び負の電荷に、各負及び正の電荷から作用する電場の平均は零になると考えられる。

勿論各電子間の相互作用は(a)と(b)では明らかに異なるが、之は量子力学的なポテンシャル・エネルギーの高まりとして理解され、電気分極に関係した電磁エネルギーの変化とは理解しないのが普通の考え方になるわけである。この考え方は極性のない分子の電気分極現象には略々妥当するものであると考えられる。

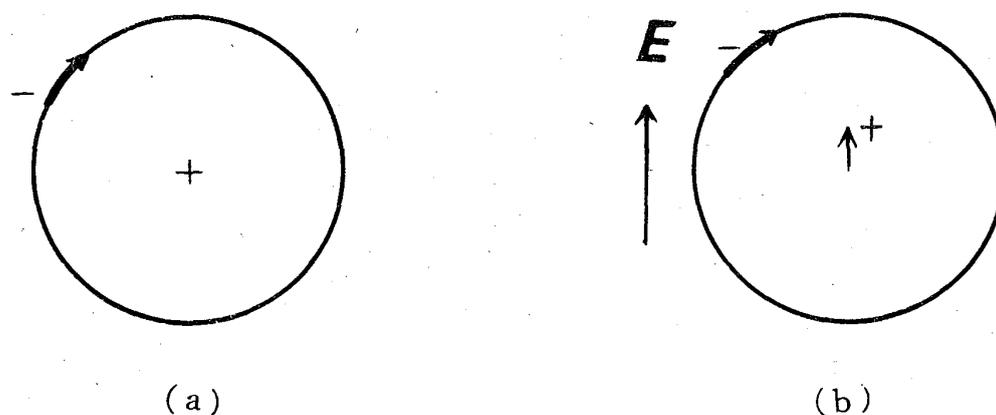


図 1 2 水素原子の電気分極

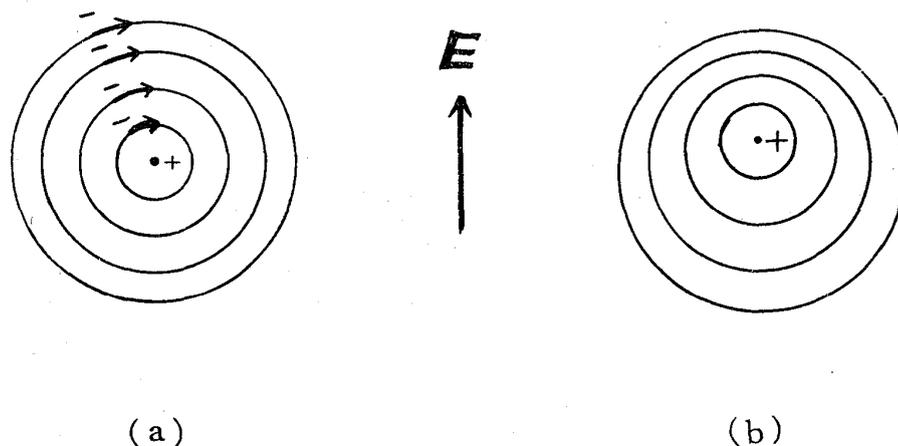


図 1 3 電子雲の移動による電気分極

次に上の概念の適用される今一つの重要な場合として結晶電場中でのイオンの変位による電気分極を考えよう。図 14 にその一つの場合を示す。図は NaCl 結晶の場合であり、陽イオン  $\text{Na}^+$  は陰イオン  $\text{Cl}^-$  で造られた正八面体の中にある。この場合電気二重極を起こす最小の単位として何をとるかが問題であるが、図に示したように各陰イオンの中心を結んできた正八面体の内部の電荷と、その中心の陽イオンとを考えるのが一つの方法である。この場合負電荷を静止させ、正電荷だけ動かしても十分一般的なことは自

明であろう。さて、この正八面体の中心において、周りのコーナーの負電荷が造る電気ポテンシャルの場は、ラプラスの方程式から

$$V(x, y, z) = V_4 [(x^4 + y^4 + z^4) - 3(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2)] + V_6 [\dots\dots\dots] + \dots\dots\dots \quad (67)$$

という風に展開される。ただし座標系の中心は八面体の中心である。xの二次の項は対称性から存在しないのである。したがって、陽イオンの微小変位に対し、微小変位に比例して発生して、電荷を元に戻すような電場は存在しないのである。すなわち

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -V_4 [4(x^3 \nabla x + y^3 \nabla y + z^3 \nabla z) - 6\{(z^2 + y^2)x \nabla x + (x^2 + z^2)y \nabla y + (y^2 + x^2)z \nabla z\}] \quad (68)$$

であって、変位が微小な限り、x, y, zの三次以上の項として無視される。但し∇x, ∇y, ∇zは普通i, j, kと書かれるx, y, z方向の単位ベクトルである。

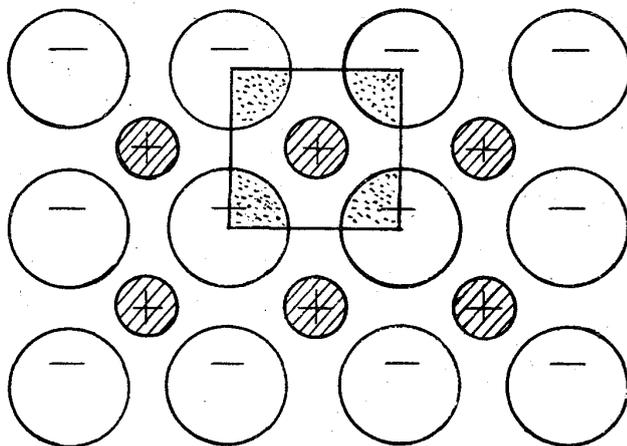


図 1 4 イオン結晶中の中性領域

以上の考え方は十分一般的であって、今一応除外した(B)の場合、例えばHCl分子からなる気体の場合を考えてみると、図15に示したようにその構造はCl<sup>-</sup>の大きい電子雲の一部にプロトンであるH<sup>+</sup>が捕まっているような形であって、もともと電気二重極である。この場合外から電場を作用させると、この電場は二つの効果を及ぼす。一つ

は統計効果であって、外電場零では、この二重極能率は空間方位的に random であるが、電場の印加と共に電場方向に二重極能率の統計分布が変る。今一つは電場により  $H^+$  と  $Cl^-$  の相対距離の変る変化である。ここでは絶対零度もしくは絶対零度と同等に見做して差支えない現象にのみ興味を持っているとすると、後者の場合だけが問題になるが、 $H^+$  と  $Cl^-$  が、図 15 の位置で安定である以上、 $H^+$ 、 $Cl^-$  にそれぞれ働いている引力としての電場のほかに、それぞれを引き離す量子力学的な力があることは疑い

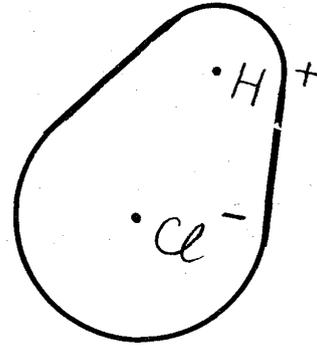


図 15 HCl 分子の想像図

ない。この力は量子力学のハミルトニアンからして、電気力に量子力学の原理が加わった総合効果である。従って引力としての電気力丈を別に取り出すことは無理であると考へて、これらの総合効果をポテンシャル

$$U_{\text{Mech}} = \frac{k}{2} (\Delta \ell)^2 \quad (69)$$

で示すことができる。(Mech は力学的という意)  $\Delta \ell$  は  $H^+$  と  $Cl^-$  間の実効距離の微小変化である。このように考えると、外部から印加される電場  $\mathbf{E}$  は  $H^+$ 、 $Cl^-$  にそのまま印加され、 $H^+$  と  $Cl^-$  相互間の静電相互作用は (68) 式で別に考へて、力学的なポテンシャルの中に含めて考へることができるわけである。

以上誘起電気二重極の基本単位に働く電場には、自分自身の作る電場を無視して考へることが可能であることが示されたわけである。この原理は次章では場合により適当に使い分けてゆくことになる。適当にと言ったのは、場合によっては図 15 の場合の  $Cl^-$ 、 $H^+$  がそれぞれ造る電場は静電場として考へて、それに釣合う力学ポテンシャル  $U_{\text{Mech}}^*$  を考へ、その二つの和が丁度 (69) 式であるという風に考へる場合もあり得るからである。

今までの説明の中で、物質中で誘起電気二重極を起こす基本単位に働く電場が、外から印加した電場  $\mathbf{E}_{\text{Appl}}$  そのものであるということは勿論言っていない。物質が電気分極すればその結果反電場  $\mathbf{E}_{\text{Dep}}$  (Depolarization Field) が生じるし、又、いわゆる Lorentz の微視電場、 $+\frac{1}{3}\mathbf{P}$  は、もっとも普通な等方質の場合、考へている二重極の単位に対し、物質のその場所における電場

飯田修一

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{Appl}} + \mathbf{E}_{\text{Dep}} \quad (70)$$

に更に附加されるべき電場である。すなわち二重極 (dipole) に働く電場  $\mathbf{E}_{\text{local}}$  は

$$\mathbf{E}_{\text{local}} \sim \mathbf{E} + \frac{1}{3} \mathbf{P} \quad (71)$$

となることは最も一般的であろう。

さて次に図 12 のモデルに立って、外場  $\mathbf{E}_{\text{local}}$  が印加されたときの誘起電気二重極に関するエネルギー関係式を求めよう。外場はあるポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  を持つと考えられる。電磁気学の定理により、 $\phi(\mathbf{r})$  の球殻上の平均値はその球殻の中心の  $\phi(\mathbf{r})$  に等しいから、電子運動が量子論的に球殻上に拡がっているとして、図 12 は図 16 のように正負の電荷が一致した位置にいた時 (a) から、電場  $\mathbf{E}_{\text{local}}$  の印加により、ベクトル  $\mathbf{l}$  丈分離したと考えることができる。従って  $\phi(\mathbf{r})$  に対するエネルギーは

$$\begin{aligned} V_{\text{Elec}} &= Q\phi(\mathbf{r}^+) - Q\phi(\mathbf{r}^-) \\ &= Q\phi\left(\bar{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{l}}{2}\right) - Q\phi\left(\bar{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{l}}{2}\right) \\ &= Q[\mathbf{l} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \phi(\bar{\mathbf{r}})] = (\mathbf{p} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}}) \phi(\bar{\mathbf{r}}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (72)$$

になる。ただし

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^-}{2} \quad (73)$$

$$\frac{\mathbf{l}}{2} = \frac{\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-}{2} \quad (74)$$

で、 $Q$  は正電荷の値、従って

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l} \quad (75)$$

は誘起電気二重極能率である。又  $\nabla_{\bar{\mathbf{r}}}$  は  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  に関する勾配である。

又一方、 $\mathbf{l} = 0$  が外場  $\mathbf{E}_{\text{local}} = 0$  の時の安定位置であるから、前述の意味の力学的ポテンシャル  $U_{\text{Mech}}$  は  $\mathbf{l}$  の小さい範囲で

$$U_{\text{Mech}} = \frac{\alpha}{2} l^2 = \frac{\alpha p^2}{2Q^2} \quad (76)$$

と書ける。平衡状態は

$$U_{\text{Total}} = U_{\text{Elec}} + U_{\text{Mech}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} + \frac{\alpha p^2}{2Q^2} \quad (77)$$

の Min. である。今の場合は明らかに  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$  であって、

$$U_{\text{Total}} = -pE + \frac{\alpha p^2}{2Q^2} \quad (78)$$

$$\frac{\partial U_{\text{Total}}}{\partial p} = -E + \frac{\alpha p}{Q^2} = 0 \quad (79)$$

$$p = \frac{Q^2}{\alpha} E, \quad (80)$$

$$l = \frac{p}{Q} = \frac{Q}{\alpha} E \quad (81)$$

となる。p あるいは l が E に比例して大きくなるのは誘起電気二重極の最も簡単な場合の基本的性質である。

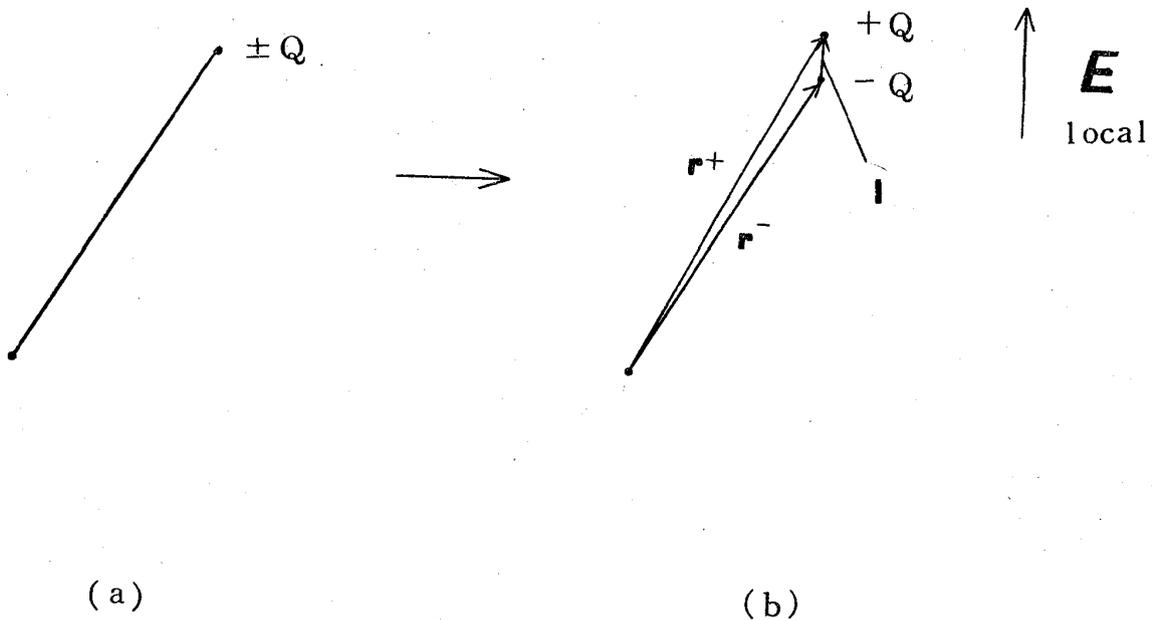


図 1 6 電気分極の原理図

これらの式の導出で、平衡状態にある誘起電気二重極を、更にマックスウェルのDamonが、 $l$ を $\delta l$ 丈変えた場合、そのための $\delta U_{\text{Total}}$ 、換言するとDamonのしなければならぬ仕事は、 $\delta l$ の一次では零である。それは(79)式により

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{Total}} &= \frac{\partial U_{\text{Total}}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} \delta l \\ &= 0 \end{aligned} \tag{82}$$

になるからである。これは図16の $+Q$ あるいは $-Q$ を $\delta \mathbf{r}^+$ あるいは $\delta \mathbf{r}^-$ だけ動かす場合にも常に成立する関係であって、平衡状態にある以上、電氣的な力と、それに釣合う力学的な力があり、両者は同一の大きさと符号が反対であるから、変位 $\delta \mathbf{r}^\pm$ に対して、各力のする仕事の符号は逆であり、差引き仕事の相和は零になるのである。

以上の結論は図15の場合のように内在的な電場が関与しても変わらないことは自明であろう。内部の電場は単に、力学的な力に相加されているに過ぎないのである。

次に外場 $\mathbf{E}_{\text{local}}$ から、電気二重極 $\mathbf{p}$ が受ける力は如何であろうか。外場だけからの考慮からは(72)式と同様に

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q\mathbf{E}_{\text{local}}(\mathbf{r}^+) - Q\mathbf{E}_{\text{local}}(\mathbf{r}^-) \\ &= (\mathbf{p} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}}) \mathbf{E}_{\text{local}}(\bar{\mathbf{r}}) \end{aligned} \tag{83}$$

となる。これは(72)式を $\mathbf{p} = \text{const}$ として更に $\bar{\mathbf{r}}$ に関して勾配をとったものに等しい。

一方全エネルギーの考慮からは(78)式から

$$-\nabla_{\bar{\mathbf{r}}} U_{\text{Total}} = -\nabla_{\bar{\mathbf{r}}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) + \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \left( \frac{\alpha p^2}{2Q^2} \right) \tag{84}$$

であるが、これは

$$-\nabla_{\bar{\mathbf{r}}} U_{\text{Total}} = - \left( \frac{\partial U_{\text{Total}}}{\partial p} \right) \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} p - \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} (U_{\text{Total}})_{\mathbf{p}=\text{const}} \tag{85}$$

となり、(79)式の平衡関係式から、第一項は零で第二項は

$$= (\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (86)$$

となり、(83)式の表現と一致する。

即ち平衡状態を考える限り、それに働く電気力は単純な Coulomb 力の計算と、力学的エネルギーを考慮した全ポテンシャルエネルギーからの計算が一致するのである。電気力の基本は Coulomb 力であることは申すまでもないことであって、このことは式(61)の結論が圧縮性流体に対し、その密度変化を考慮しても電磁気力に関する限り厳密な表現であるという既に述べた事実を裏書きする一つの例である。

(78)式は(80)式の関係を使用して

$$\begin{aligned} U_{\text{Total}} &= -\frac{Q^2}{\alpha} E^2 + \frac{\alpha}{2Q^2} \frac{Q^4}{\alpha^2} E^2 \\ &= -\frac{Q^2}{2\alpha} E^2 = -\frac{1}{2} p E \end{aligned} \quad (87)$$

となる。電媒質で古典的に

$$U_{\text{Elec}} = \int \frac{\epsilon E^2}{2} dV = \int \frac{(\epsilon-1)}{2} E^2 dV + \int \frac{E^2}{2} dV \quad (88)$$

と仮定したものと比較する符号が反対に見える。これは電磁気学のエネルギーの理解は式(22)で与えた解決以上に拡張することが簡単ではないことの一つの証拠であり、(87)式は外場  $\mathbf{E}_{\text{local}}$  中の誘起電気二重極に対する実効的な (effective) ポテンシャルエネルギーと考えるべきものである。従って、周囲の条件の相違 (例えば圧力等) により、 $\alpha$  の値に変化が生じた場合、

$$\delta U_{\text{Total}} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

などといった式を考えることは慎重でなければならない。多くの古典電磁気学の教科書 (Landau, Stratton, Ponofsky-Philips 等) が(88)式を仮定した上で、(之は或る条件のもとで可であるが、) 密度変化等によって  $\epsilon$  が変化したときの全エネルギーの変化を

$$\delta U_{\text{Elec}} = \int \frac{\delta \epsilon E^2}{2} dV$$

飯田修一

としているのは甚だ誤解を生じ易い記述方法であって、その詳細を後程示す。

以上の考察は量子論の根拠の上に立ってなされているとみなし得る。量子力学によれば、系のエネルギーはハミルトニアンによって表わされ、Schrödinger 近似のもとでその形は

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^2 + \sum_{i>j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi r_{ij}}$$

であって、 $m_i$  は  $Q_i$  の電荷を持つ担体の質量、 $\mathbf{p}_i$  はその運動量である。Total Energy は系の状態を決める波動関数を  $\Phi$  として

$$\langle \Phi^* | \mathcal{H} | \Phi \rangle = \sum_i \frac{1}{2m_i} \langle \Phi^* | \mathbf{p}_i^2 | \Phi \rangle + \sum_{i>j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi} \langle \Phi^* | \frac{1}{r_{ij}} | \Phi \rangle$$

であって、各  $Q_i$  の担体の kinetic energy の平均値の和と、各電荷間の静電クーロン・エネルギーの平均値の和になっている。古典力学からの相違は唯系の状態  $\Phi$  を決める式が量子論的な法則に支配され、例えば不確定性の原理とか、定常状態の概念等の量子効果が入るのであって、系の変化が準静的に行われる限り、古典的には統計効果といった表現に近い状況がその状態の定義と関して発生しているというだけの修正と考えることができる。

## § 8. マックスウェル-ローレンツ模型による電媒質流体中の電磁力の解析

物質に働く電磁力に関する限り式(61)は完全な表現である。しかしながら、圧縮性の電媒質流体に対し、式(88)を仮定した上で、式(64)という極めて誤解され易い表現が従来の常識となっていた。この問題に解決を与えるためには式(64)の意味する内容を明確化しなければならない。そのためには物質中の電磁エネルギーと電磁力の十分な認識がなくてはならない。今からマックスウェル-ローレンツの模型の上に立ち、できるだけ単純な、しかしかなり一般的な妥当な仮定の上に立って、以上の関係を明確化することにする。したがって従来の方法と同じく微少任意変位  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  を与える方法を使用する。又この章では一番簡単な電媒質としてすべての場所で

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} \tag{89}$$

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解についての比例関係を仮定する。 $\epsilon(\mathbf{r})$ は場所の関数であると共に密度 $\tau$ の関数でもあると考える。これは又全ての変化を準静過程として transient な時間変化を無視していることに対応する。

今電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 中にある電媒質流体を考える。 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の主要な起源として固定された微視的な電荷 $Q_i$ を考え、(図17),更に流体の各部分の電気分極 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ の起源である要素誘起電気二重極の担い手として $Q_i$ を考える。したがって流体中には $Q_i$ は存在しないとする。

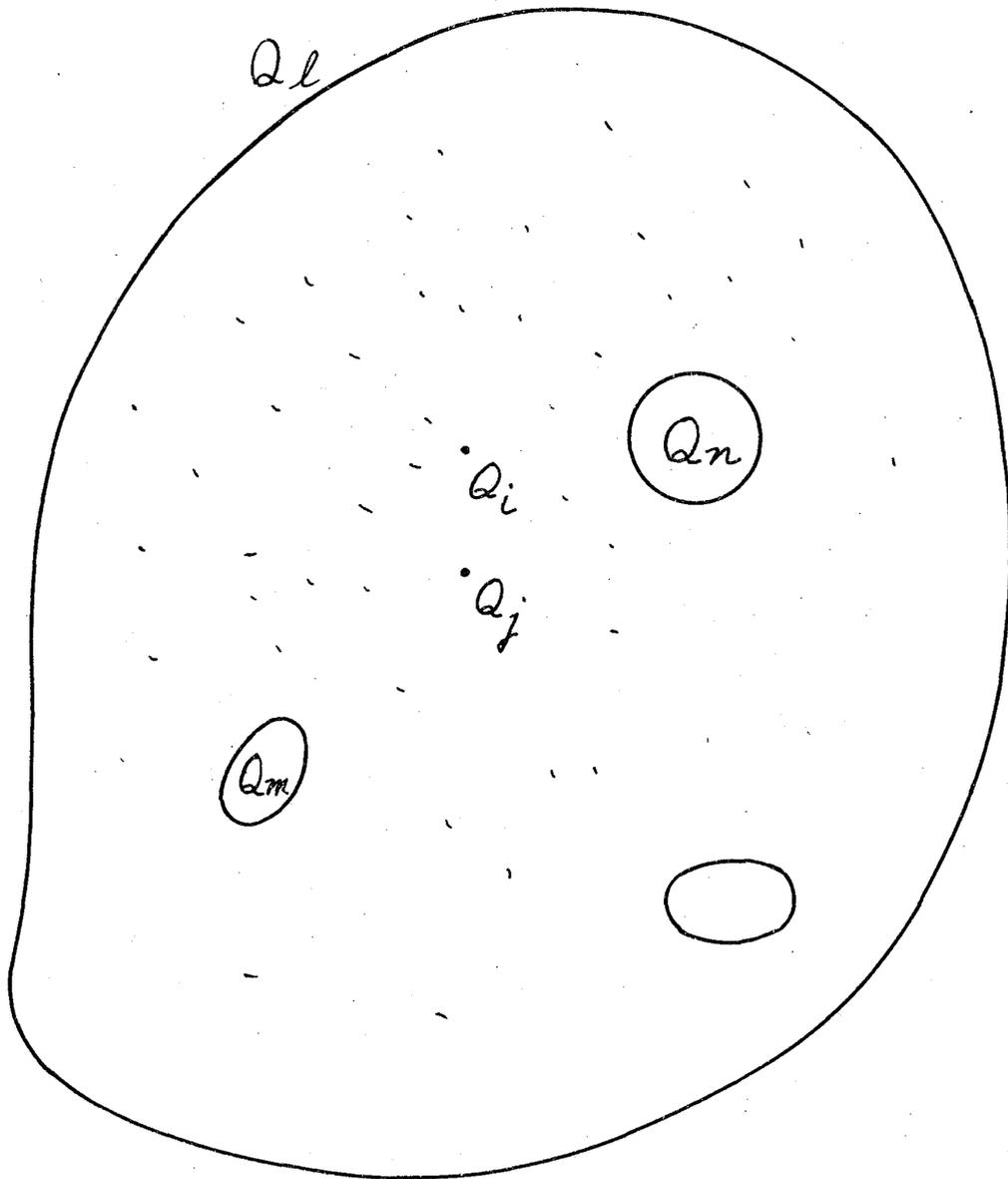


図17 固定された定電荷 $Q_l, Q_m, Q_n, \dots$ ,と物質中の電気分極の担い手になる電荷 $Q_i, Q_j, \dots$

飯田修一

$Q_i$  は運動し、又電場に respond して相対位置を変える。しかし運動は緩慢でエネルギーは

$$U_{El}^L = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{e}^2 dV = \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{8\pi r_{ij}} + \sum_{l,m} \frac{Q_l Q_m}{8\pi r_{lm}} + \sum_{i,l} \frac{Q_i Q_l}{4\pi r_{il}} \quad (90)$$

とあらわされる。(Lは Lorentz の意)

今マックスウェルの Damon が、各流体の各部分  $\mathbf{r}$  に微少移動  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  を与えたものとする。そうすると

$$\begin{aligned} \delta U_{El}^L &= \iiint \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{e} dV \\ &= \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{8\pi r_{ij}^2} (-\delta r_{ij}) + \sum_{i,l} \frac{Q_i Q_l}{4\pi r_{il}^2} (-\delta r_{il}) \\ &= \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi r_{ij}^3} (-\mathbf{r}_{ij} \cdot \delta \mathbf{r}_i) + \sum_{i,l} \frac{Q_i Q_l}{4\pi r_{il}^3} (-\mathbf{r}_{il} \cdot \delta \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (91)$$

ただし

$$r_{ij}^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$$

$$r_{ij} \cdot \delta r_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_j)$$

$$\therefore \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{8\pi r_{ij}^3} [ -(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (\delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_j) ] = \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi r_{ij}^3} (-\mathbf{r}_{ij} \cdot \delta \mathbf{r}_i) \quad (92)$$

$$\text{又 } r_{il}^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l)^2$$

$$r_{il} \cdot \delta r_{il} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{il} \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (93)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \delta U_{El}^L &= \sum_i \left[ -Q_i \left( \sum_j \frac{Q_j r_{ij}}{4\pi r_{ij}^3} \right) - Q_i \left( \sum_l \frac{Q_l r_{il}}{4\pi r_{il}^3} \right) \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i \\ &= \sum_i \left[ -Q_i (\mathbf{e}_{P,i} + \mathbf{e}_{\rho,i}) \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] \end{aligned} \quad (94)$$

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解について

となる。 $\mathbf{e}_{P,i}$  は  $Q_i$  に働く微視的な電場  $\mathbf{e}(\mathbf{r}_i)$  のうち、電媒質自身の分極  $\mathbf{P}$  に起源を有するもので、 $\mathbf{e}_{\rho,i}$  は仮定により  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  を受けない実電荷  $Q_i$  による実電荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  に起因する電場である。

(94)式の導出を理解した上で、解析の便宜上更に次の手続きを行なう。まず図18に示したように流体電媒質をその境界から境界まで  $\mathbf{P}$  に平行に細長い角柱状の体積に細分する。この細分も物質の分極単位  $\mathbf{p}_i$  を分断しない境界を持つよう注意されていることは自明であろう。更にこの角柱状の体積を適当に分断すると細長い直方体状の体積ができるであろう。この各要素を Needle と称することにし、それは番号  $1, 2, 3, \dots, \lambda, \dots, \mu, \dots, \varrho$  をつける。又各 Needle 内の電荷  $Q_i$  に番号

$$\begin{aligned}
 & 1_1, \dots, i_1, \dots, k_1; 1_2, \dots, i_2, \dots, k_2; \\
 & \dots; 1_\lambda, \dots, i_\lambda, \dots, k_\lambda; \dots, 1_\mu, \dots, i_\mu, \dots, k_\mu; \dots; \\
 & 1_\varrho, \dots, i_\varrho, \dots, k_\varrho,
 \end{aligned} \tag{95}$$

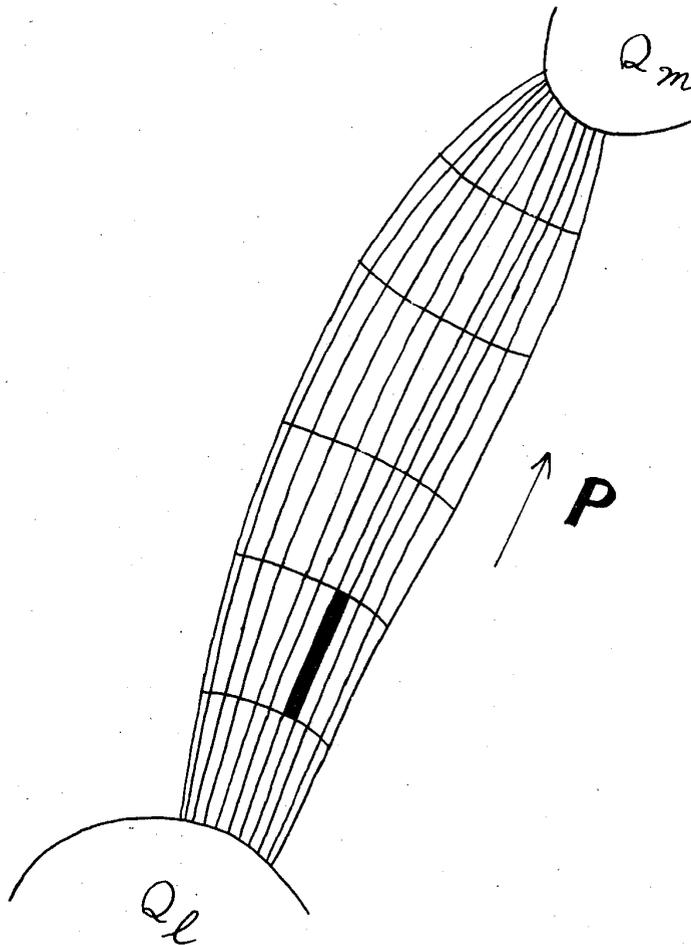


図18 誘電体を  $\mathbf{P}$  に平行な Needle に分割する

飯田修一

をつける。こうすると Total Electric Energy は

$$U_{El}^L = \sum_{\lambda \neq \mu} \sum_{i_\lambda} \sum_{i_\mu} \frac{Q_{i_\lambda} Q_{j_\mu}}{8\pi r_{i_\lambda j_\mu}} + \sum_{\lambda} \sum_{i_\lambda \neq j_\lambda} \frac{Q_{i_\lambda} Q_{j_\lambda}}{8\pi r_{i_\lambda j_\lambda}} + \sum_{l, m} \frac{Q_l Q_m}{8\pi r_{lm}} + \sum_{\lambda} \sum_{i_\lambda} \sum_l \frac{Q_{i_\lambda} Q_l}{4\pi r_{i_\lambda l}} \quad (96)$$

となる。これは当然

$$U_{El}^L = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{e}^2 dV = \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \iiint_{V_\lambda} \mathbf{e}^2 dV \quad (97)$$

であるが、各 Needle  $\lambda$  内の  $\mathbf{e}$  を

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{out} + \mathbf{e}_{in} \quad (98)$$

に分解し、 $\mathbf{e}_{in}$  を Needle 内の電気分極  $\mathbf{p}$  の構成要素である  $Q_{i_\lambda}$  に帰因するもの、 $\mathbf{e}_{out}$  をその Needle の外部にその起因を有するものとする、

$$\mathbf{e}_{out} = \mathbf{E} \quad (99)$$

が十分な近似で言える。従って

$$\begin{aligned} U_{El}^L &= \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \iiint_{V_\lambda} (\mathbf{E} + \mathbf{e}_{in})^2 dV \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \iiint_{V_\lambda} [\mathbf{E}^2 + 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_{in}) + \mathbf{e}_{in}^2] dV \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \iiint_{V_\lambda} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{e}_{in}^2) dV \end{aligned} \quad (100)$$

となる。(100)式の第二項の消えた理由は

$$\overline{\mathbf{e}}_{in} = \overline{\mathbf{e}}_{out} + \overline{\mathbf{e}}_{in} = \mathbf{E} \quad (101)$$

であるからである。ここに  $\overline{\mathbf{e}}_{in}$  は体積  $V_\lambda$  内の平均を意味する。(100)式は重要な結論であって、

$$U_{El}^L = \iiint \frac{\mathbf{E}^2}{2} dV + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \iiint_{V_\lambda} \mathbf{e}_{in}^2 dV \quad (102)$$

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解についてであり、 $\mathbf{p}$ に平行な Needle の特徴として、Needle 内の電気分極  $\mathbf{p}_i$  による電場  $\mathbf{e}_{in}$  は、図 19 に示したように、Needle の外には無視できる程僅かしか出ないから (102) 式の各 Needle 内の積分は

$$U_{in}^{\lambda} = \frac{1}{2} \iiint_{V_{\lambda}} \mathbf{e}_{in}^2 dV = \sum_{i_{\lambda} \neq j_{\lambda}} \frac{Q_{i_{\lambda}} Q_{j_{\lambda}}}{8\pi r_{i_{\lambda}, j_{\lambda}}} \quad (103)$$

とおけるのである。

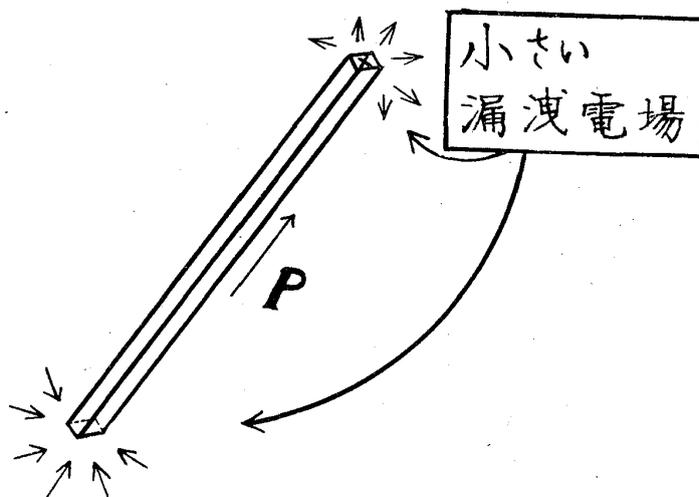


図 19

図 19 の意味を理解する上で次の注意は必要であろう。例えば図 20 に示したように球形の物質を考えると、その反電場はよく知られているように

$$\mathbf{E}_{dep} = -\frac{1}{3}\mathbf{P} \quad (104)$$

である。ところが、この物質を図 19 のような細い Needle に分解して考えるとその各々は図 19 のように無視できる程小さい漏洩電場であると称したにも拘らず、積分したものは (104) 式のように巨大になるものではないか。従って箇々には無視できても、全部集めた積分効果は有限であり、無視できないのではないかという疑問である。これに対する答は次の如くである。図 20 に示した一つの特定の Needle の漏洩電場の状況から判るように、図 19 の Needle 自身に印加されるものではない、Needle 外に出ている漏洩電場の総和が、(104) 式となるのであって、(104) 式が存在するとしても、図 19 或

飯田修一

は図 20 の Needle 自身にかかる漏洩電場は依然として無視されるということである。そして、勿論図 20 の場合反電場 (104) は無視できないが、これは Needle 間の相互作用のエネルギーを生ずるような電場であって、(96) 式の第一項の問題であり、(103) 式は依然として成立するのである。

さて今マックスウェルの Damon が  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  の変位を強制したとして、それに伴うエネルギーの変化を考えよう。今から各 Needle  $\lambda$  を構成する物質片に著目し、その移動を追う。図 21 に示したように  $V_\lambda$  が移動して  $V'_\lambda$  になって後、その時の  $\mathbf{P}'$  が、 $V'_\lambda$  の軸と平行でなくなった時には、 $V'_\lambda$  の正しい形としては、 $\mathbf{P}'$  に軸が平行になるよう図 21 に示したように上下で変形を行ない、 $V_\lambda^*$  としなければ、 $\mathbf{P}$  に平行な Needle という条件を充すことができないが、その処置は思想的には行うものとする。しかし  $V_\lambda^*$  と  $V'_\lambda$  の差は二次の微小量である体積の考え直しであって、以下に述べる議論は  $V'_\lambda$  の中で論じても、結果には差支えないと結論できるから、そのように考えて議論を進める。又この考え方で Energy の変分を追跡するのであるが、電磁気学体系の場合、ある着目した体積内に物質の出入を伴う形での追跡よりも、十分準静的にゆっくりした変化である以上、この形のように物質自身に着目してゆく追跡方法が、基本

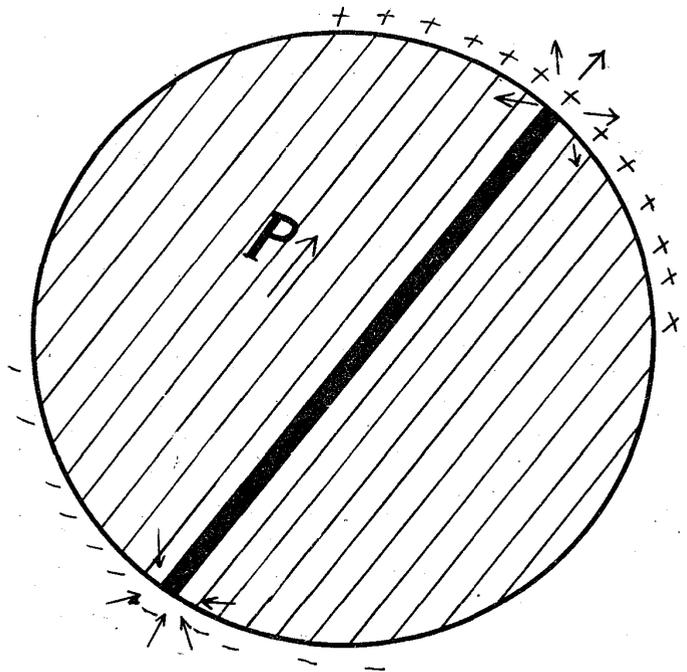


図 20

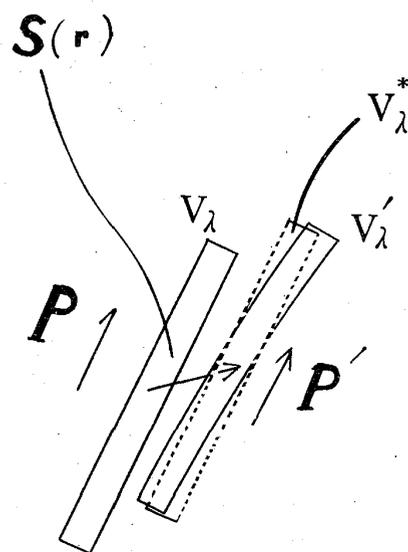


図 21  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  の移動に伴う変化

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解について、的に相対論の要請とも合致する追跡の仕方である。座標系は物質と共に動き、かつその速度が十分遅いから、すべての電磁量は速度のない時の値と等しいと考えてゆくことになる。さて  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  の移動後(94)式の導出と同様に

$$\delta U_{El}^L = \sum_{\lambda} \sum_{i_{\lambda}} Q_{i_{\lambda}} (-\mathbf{E}_{i_{\lambda}}) \cdot \delta \mathbf{r}_{i_{\lambda}} + \sum_{\lambda} \sum_{i_{\lambda}} Q_{i_{\lambda}} (-\mathbf{e}'_{i_{\lambda}}) \cdot \delta \mathbf{r}_{i_{\lambda}} \quad (105)$$

ができる。 $\mathbf{E}_{i_{\lambda}}$ ,  $\mathbf{e}'_{i_{\lambda}}$  はそれぞれ最初の状態で  $Q_{i_{\lambda}}$  に働いている電場  $\mathbf{E}$  及び、 $\mathbf{E}$  以外に、Needle  $\lambda$  の中の電荷からくる電場  $\mathbf{e}'$  である。

更に  $V_{\lambda}$  の中の各  $Q_{i_{\lambda}}$  を電気二重極を構成する二つの電荷の対  $Q_{\nu_{\lambda}}^{+}$ ,  $Q_{\nu_{\lambda}}^{-}$  に分類して番号を附する。すなわち

$$Q_{\nu_{\lambda}}^{+} = -Q_{\nu_{\lambda}}^{-} = Q_{\nu_{\lambda}}$$

である。そうして  $\delta \mathbf{r}_{i_{\lambda}}$  を

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{r}_{\nu_{\lambda}}^{+} &= \mathbf{s}(\mathbf{r}_{\nu_{\lambda}}) + \mathcal{D} \mathbf{r}_{\nu_{\lambda}} \\ \delta \mathbf{r}_{\nu_{\lambda}}^{-} &= \mathbf{s}(\mathbf{r}_{\nu_{\lambda}}) - \mathcal{D} \mathbf{r}_{\nu_{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

に分解する。これは図22に示したように  $\mathbf{s}(\mathbf{r}_{\nu_{\lambda}})$  が Damon により強制されたもの、 $\mathcal{D} \mathbf{r}_{\nu_{\lambda}}$  はその後、新しい平衡位置を求めて系自身が自発的に変位した部分と考えることができる。

さて Needle  $V_{\lambda}$  は電場  $\mathbf{E}$  のもとにあると考えられる。したがって  $\mathbf{E}$  以外の電場  $\mathbf{e}'$  は内力であって、Needle  $V_{\lambda}$  内の力学的ポテンシャルによる多くの力の一部として分類するという立場を取る。この考え方の根拠は既に前章で説明している。この考え方により式(105)の第二項は古典電磁気学的電気エネルギーの項から落として考えることになる。この結果

$$\delta U_{El}^{Max} = \sum_{\lambda} \sum_{i_{\lambda}} Q_{i_{\lambda}} (-\mathbf{E}_{i_{\lambda}}) \cdot \delta \mathbf{r}_{i_{\lambda}} \quad (107)$$

とできる。Max は Maxwell の略である。

こうして Needle  $V_{\lambda}$  のもつ力学的エネルギーは short range の local な作用に関する限り、電気的なものをも全部含めたものとして考えられることになり、今の解析には

飯田修一

重要な一歩となる。今 Needle  $V_\lambda$  の力学的エネルギーを

$$U_{\text{Mech}\lambda} = \sum_{\nu_\lambda} u_{\nu_\lambda} \quad (108)$$

とおく。 $\nu_\lambda$  は Needle  $V_\lambda$  の各電気二重極の担い手になる単位物質素片(例えば図14の八面体)であって、 $u_{\nu_\lambda}$  はその素片一箇当りのエネルギーである。今物質の密度を  $\tau$ 、単位物質素片の質量を  $m_\lambda$  とすると

$$u_{\nu_\lambda} = \frac{U_{\text{Mech}\lambda}}{V_\lambda \cdot \frac{\tau}{m_\lambda}} \quad (109)$$

と考えてよい。 $(\tau/m_\lambda)$  は単位体積中の単位物質素片の数になる。相互作用の性質上、 $V_\lambda$  が、微視的には十分大きいとして表面作用を無視すると、 $U_{\text{Mech}\lambda}$  は物理的に意味を持つが、 $u_{\nu_\lambda}$  そのものは(109)式の意味の平均としての意味しか物理的にはない。Needleの性質から反電場のようなものは存在しないが、上述のようにローレンツの電場等による相互作用エネルギーは(109)式の中に含まれることは注意する必要がある。

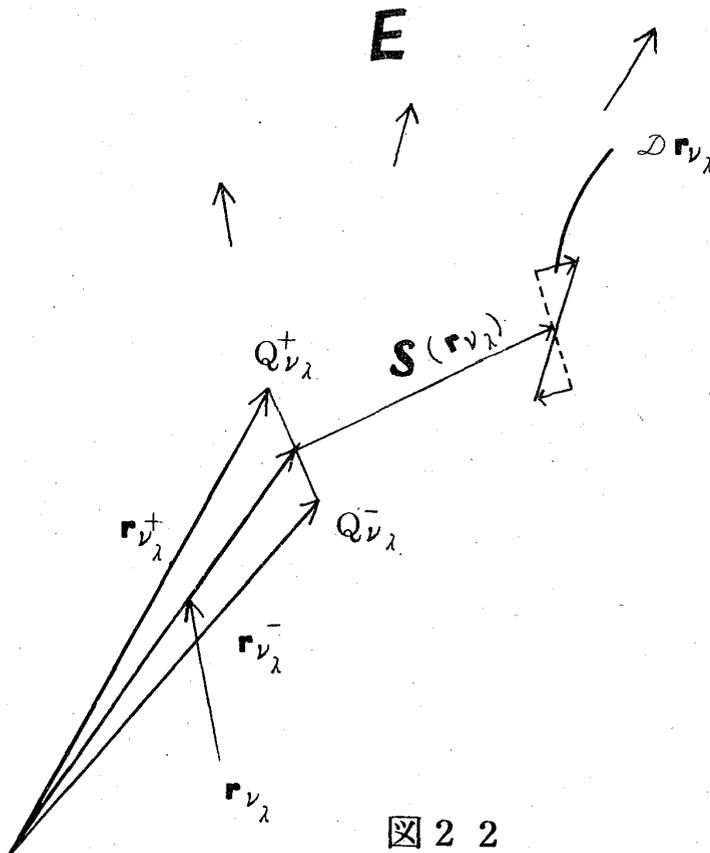


図 2 2

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解について

次に  $U_{\text{Mech}\lambda}$  の性質を考える。

仮定により、すべての変化は準静的に行う。さて図 23 において一般に電媒質 Needle  $V_\lambda$  に対し、外から供給されるエネルギーは電磁エネルギーと、力学的エネルギーの二つである。今の場合力学的エネルギーは Damon による  $V_\lambda$  の移動及び変形に伴う仕事であって、これは準静的であり、流体である以上、体積  $V_\lambda$  の変化によってのみ吸収されると考えると、残りはすべて電磁エネルギーの形で与えられねばならない。電磁エネルギーの移動関係はマックスウェルの方程式から

$$-c \iint_{S_\lambda} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \delta t = \iiint_{V_\lambda} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV + \iiint_{V_\lambda} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \delta t dV + \iiint_{V_\lambda} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV \quad (110)$$

と一般的に示され、外から入る電磁エネルギーは必ず左辺の Poynting Radiation Vector の積分の形で入り、今の場合  $V_\lambda$  中での受け取り方は

$$\iiint_{V_\lambda} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV = \iiint_{V_\lambda} (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{P}) dV \quad (111)$$

であることが保証される。之は重大な点であって、もし

$$\delta \mathbf{P} = 0. \quad (112)$$

すなわち、巨視的な電気分極の変化がないと電磁エネルギーの移動の結果としての

$$\delta U_{\text{Mech}\lambda} = 0 \quad (113)$$

と考えられるのである。これは(111)(102)式から明らかであるが、尚(97)式との関係を見るために次のような思考実験を行ってみよう。

今  $t=0$  で、マックスウェルの Damon に頼んで  $V_\lambda$  中のすべての電荷を cramp させる。そして電場  $\mathbf{E}$  を  $\mathbf{E}_0$  から  $\mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E}$  にあげる。そうすると

$$\delta \iiint_{V_\lambda} \frac{e^2}{2} dV = \iiint_{V_\lambda} \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{e} dV$$

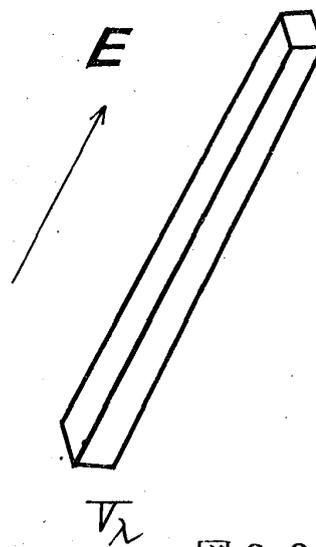


図 23

飯田修一

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_{V_\lambda} (\mathbf{e}_{in} + \mathbf{E}_0) \cdot \delta \mathbf{E} dV \\
 &= \iiint_{V_\lambda} \mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E} dV
 \end{aligned} \tag{114}$$

であって、(111)式が証明され  $\delta U_{Mech\lambda} = 0$  となる。さて今  $\delta \mathbf{E} \rightarrow \Delta \mathbf{E}$  と有限の大きさにすると (114)式は積分されて

$$\Delta \left( \iiint_{V_\lambda} \frac{\mathbf{e}^2}{2} dV \right) = \left[ \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right]_{\mathbf{E}_0}^{\mathbf{E}_0 + \Delta \mathbf{E}} V_\lambda \tag{115}$$

となる。そして次に Damon の cramp を解くと (111)式より電磁エネルギーは

$$\int \delta U = \int_{\delta \mathbf{P}} \iiint_{V_\lambda} (\mathbf{E}_0 + \Delta \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{P} dV \tag{116}$$

という形で入ってくる。この時は過程が準静的ではないから、入ってきた電磁エネルギーの一部は図24に示したように運動のエネルギーになってゆくことも考えられる。以上が、電磁エネルギーが  $U_{Mech\lambda}$  に変換してゆく過程であって、物質界は量子論により記述されるとは言え、電磁気学の範疇に尚入っているのである。

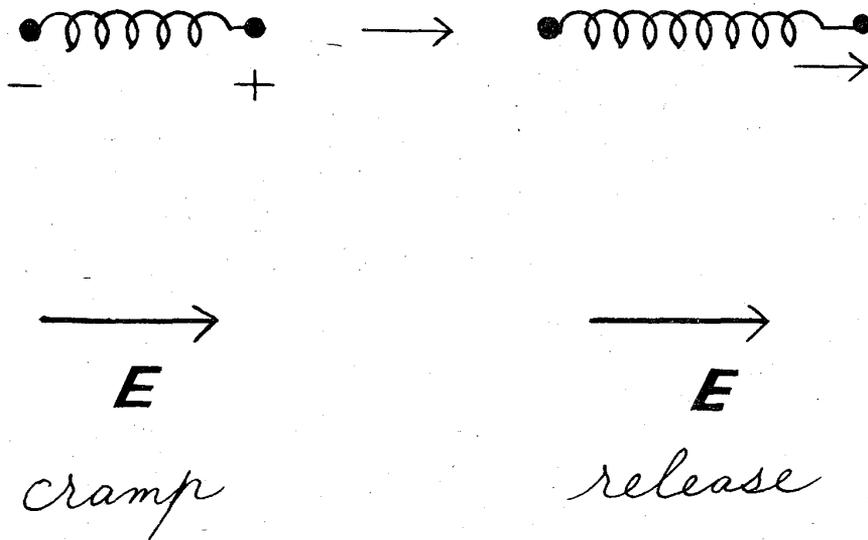


図 24

さてこれから最初の仮定のとおり全て準静過程であるとする。そして

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} \tag{117}$$

であると仮定する。  $\epsilon(\mathbf{r})$  は正確には

$$\epsilon(\mathbf{r}, \tau) \quad (118)$$

と考える。  $\mathbf{r}$  は物質の種類を指定し、  $\tau$  はその密度を指定すると考える。当然物質の種類は  $\mathbf{r}$  の緩かな関数である。この条件のもとで

$$u_{\nu\lambda} = u(\mathbf{r}_{\nu\lambda}, V_{\nu\lambda}, p_{\nu\lambda}) \quad (119)$$

と考えられる。  $V_{\nu\lambda}$  は  $u_{\nu\lambda}$  の体積であり、  $p_{\nu\lambda}$  は図 22 で考えた  $Q_{\nu\lambda}$  の二重極のエネルギーである。準静過程であるから、  $u_{\nu\lambda}$  の中には、kinetic energy などの項がなく、又  $p_{\nu\lambda}$  は電場  $E_{\nu\lambda}$  の関数で、  $\mathbf{r}_{\nu\lambda}$ 、  $V_{\nu\lambda}$  が指定されると、  $p_{\nu\lambda}$  と  $E_{\nu\lambda}$  は一対一に比例的に対応するから、  $p_{\nu\lambda}$  と  $E_{\nu\lambda}$  を独立に考える必要がないと前提した訳である。

さて  $\lambda$  を省いて

$$u_\nu = u(\mathbf{r}_\nu, V_\nu, 0) + \left(\frac{\partial u}{\partial p_\nu}\right)_{p_\nu=0} \cdot p_\nu + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p_\nu^2}\right)_{p_\nu=0} \cdot \frac{p_\nu^2}{2} \quad (120)$$

が得る。  $E_\nu = 0$  で  $p_\nu = 0$  であるから、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p_\nu}\right)_{p_\nu=0} = 0$$

であって

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p_\nu^2}\right)_{p_\nu=0} = u''(\mathbf{r}_\nu, V_\nu) \quad (121)$$

とおくと、

$$u_\nu = u^0(\mathbf{r}_\nu, V_\nu) + u''(\mathbf{r}_\nu, V_\nu) \cdot \frac{p_\nu^2}{2} \quad (122)$$

となる。  $V_\nu$  固定のもとでは

$$(\delta u_\nu)_{V_\nu} = u''(\mathbf{r}_\nu, V_\nu) p_\nu \delta p_\nu = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{p}_\nu \quad (123)$$

飯田修一

が(111)式から出る。ただし

$$\delta P = \sum_{\text{単位体積}} \delta p_{\nu} \quad (124)$$

は当然である。又今簡単のため、 $\mathbf{E} \parallel \mathbf{p}_{\nu}$  と仮定した。従って

$$p_{\nu} = \frac{1}{u''(\mathbf{r}_{\nu}, V_{\nu})} E \quad (125)$$

となる。

力学的な変化に対しては、変数は体積  $V_{\nu}$  だけであって、力学の一般原則により(122)式から

$$\frac{\partial u_{\nu}}{\partial V_{\nu}} = -p = \frac{\partial u^0}{\partial V_{\nu}} + \frac{\partial u''}{\partial V_{\nu}} \cdot \frac{p_{\nu}^2}{2} \quad (126)$$

$$(\delta u_{\nu})_{p_{\nu}} = -p \delta V_{\nu} \quad (127)$$

となる。ここに  $p$  は力学的な流体圧である。又

$$P = \sum_{\text{単位体積}} p_{\nu} = \frac{\tau}{m_{\lambda}} p_{\nu} = \frac{\tau_{\lambda}}{m_{\lambda}} \frac{1}{u''} E \quad (128)$$

$$\therefore \varepsilon - 1 = \frac{\tau_{\lambda}}{m_{\lambda}} \frac{1}{u''} \quad (129)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{\lambda}} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\tau_{\lambda}} \right) = \frac{1}{m_{\lambda}} \frac{-1}{(u'')^2} \cdot \frac{\partial u''}{\partial V_{\nu}} \cdot \left( -\frac{m_{\lambda}}{\tau_{\lambda}^2} \right) \quad (130)$$

$$\therefore V_{\nu} = \frac{m_{\lambda}}{\tau_{\lambda}}, \quad \frac{\partial V_{\nu}}{\partial \tau_{\lambda}} = -\frac{m_{\lambda}}{\tau_{\lambda}^2} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial u''}{\partial V_{\nu}} \cdot \frac{p_{\nu}^2}{2} &= \frac{\partial u''}{\partial V_{\nu}} \cdot \frac{1}{2} \frac{E^2}{(u'')^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_{\lambda}} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\tau_{\lambda}} \right) \cdot \tau_{\lambda}^2 \cdot E^2 \end{aligned} \quad (132)$$

$$\therefore p = -\frac{\partial u^0}{\partial V_\nu} - \frac{1}{2} \tau_\lambda^2 \cdot E^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_\lambda} \left( \frac{\epsilon - 1}{\tau_\lambda} \right) \quad (133)$$

となる。最後の項は電気歪 (electrostriction) として知られるものであるが、

$$\epsilon = 1 + \beta \tau$$

の時には零となる。 $\epsilon = 1 + \beta \tau$  の場合には物質の各電気二重極の単位  $\nu$  の分極は、密度に無関係であり、 $\epsilon$  は単に単位の数が増減分丈変化するという場合であって、電気歪が存在しないのは当然である。

さて、以上の準備の後、マックスウェルの Damon の行う全体の仕事を計算する。

さて、(106) を (107) に代入すると

$$\delta U_{El}^{Max} = \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} Q_{\nu_\lambda}^+ (-\mathbf{E}_{\nu_\lambda}^+) \delta \mathbf{r}_{\nu_\lambda}^+ + Q_{\nu_\lambda}^- (-\mathbf{E}_{\nu_\lambda}^-) \delta \mathbf{r}_{\nu_\lambda}^- \quad (134)$$

$$= \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} -Q_{\nu_\lambda} [(\mathbf{E}_{\nu_\lambda}^+ - \mathbf{E}_{\nu_\lambda}^-) \mathbf{s}(\mathbf{r}_{\nu_\lambda}) + (\mathbf{E}_{\nu_\lambda}^+ + \mathbf{E}_{\nu_\lambda}^-) \mathcal{D} \mathbf{r}_{\nu_\lambda}]$$

$$= \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} [-Q_{\nu_\lambda} (\ell_{\nu_\lambda} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\nu_\lambda}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}_{\nu_\lambda}) - Q_{\nu_\lambda} \mathbf{E}_{\nu_\lambda} \cdot 2\mathcal{D} \mathbf{r}_{\nu_\lambda}] \quad (135)$$

$$= \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} [-(\mathbf{p}_{\nu_\lambda} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\nu_\lambda}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}_{\nu_\lambda}) - \mathbf{E}_{\nu_\lambda} \cdot \delta \mathbf{p}_{\nu_\lambda}] \quad (136)$$

$$= \iiint [-(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{P}] dV \quad (137)$$

となる。一方 (123)(127) 式から

$$\begin{aligned} \delta U_{Mech} &= \sum_\lambda \delta U_{Mech\lambda} = \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} \delta u_{\nu_\lambda} \\ &= \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} [(\delta u_{\nu_\lambda})_{V_\nu} + (\delta u_{\nu_\lambda})_{P_\nu}] \end{aligned} \quad (138)$$

$$= \sum_\lambda \sum_{\nu_\lambda} (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{p}_\nu - p \delta V_\nu)$$

$$= \iiint [\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{P} - p \frac{\delta V_\nu}{V_\nu}] dV \quad (139)$$

飯田修一

が出る。 $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ により、体積 $V_\lambda$ の変化 $\delta V_\lambda$ は図25のように

$$\delta(\iiint_{V_\lambda} dV) = \iint_{S_\lambda} \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{V_\lambda} (\nabla \cdot \mathbf{s}) dV = V_\lambda (\nabla \cdot \mathbf{s}) \quad (140)$$

である。ただし $d\mathbf{A}$ は微分面積ベクトルである。従って

$$\therefore \frac{\delta V_\nu}{V_\nu} = (\nabla \cdot \mathbf{s}) \quad (141)$$

となる。

したがって、

$$\delta U_{\text{Mech}} = \iiint [\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{P} - p(\nabla \cdot \mathbf{s})] dV \quad (142)$$

Damon のした仕事 $\delta W$ は

$$\delta W = \delta U_{\text{El}}^{\text{Max}} + \delta U_{\text{Mech}} \quad (143)$$

$$= \iiint [ -(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} - p(\nabla \cdot \mathbf{s}) ] dV \quad (144)$$

$$= \iiint [ -(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} + \nabla p \cdot \mathbf{s} - \nabla \cdot (p\mathbf{s}) ] dV \quad (145)$$

である。 $\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{P}$ の仕事が互にCancelするのは重要な点である。之は式(82)の実例の一つとなっているのである。第三項は隣りあった $V_\lambda$ で互いにCancelする力学的な仕事であって、図17の境界面では $\mathbf{s}(\mathbf{r}) \equiv 0$ として、表面積に変換して無視すると、

$$\delta W = \iiint (-) [ (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \nabla p ] \cdot \mathbf{s} dV \quad (146)$$

となる。従って体積力(圧力による部分も加えて)として単位体積当り

$$\mathbf{f} = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \nabla p \quad (147)$$

の力が働いている。平衡状態では

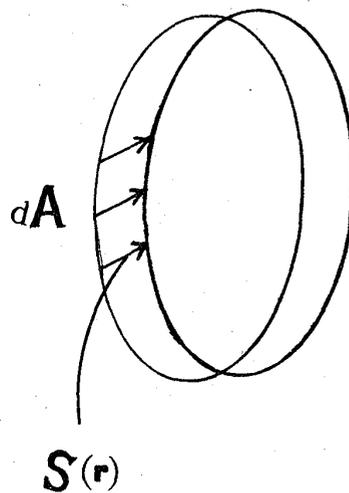


図 25

$$\mathbf{f} = 0 \quad (148)$$

即ち

$$(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla p \quad (149)$$

である。これは式(63)の結論を再検証しただけである。電歪 Electrostriction の項は、単に流体内の圧力の式(126)あるいは(133)に表われているに過ぎない。即ち

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \tau^2 E^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\epsilon - 1}{\tau} \right) \quad (150)$$

であって、 $p_0$  は式(133)に定義されているような意味で、体積  $V_v$  を不変に保った儘、もし電場  $\mathbf{E} \rightarrow 0$  に持ってゆくことが可能であった場合、観測されるであろう流体圧（之は電歪現象がある以上実現は困難である）の意味を持っている。実際は(130)式より明らかな如く、第二項は三次の微分が関係し、大きい量ではない。単に流体の体積が電場  $\mathbf{E}$  の大きさに関係する結果、電圧が掛かると共に平衡を保つためには多少の流体の移動があるということに過ぎないのである。式(64)の第3項と式(147)あるいは式(150)に表われる電歪項の物理的意義には、その明確性に根本的な相違のあることが明らかであろう。従って式(64)の導出方法並びに物理的意義の旧来の解釈は甚だ不満足なものというべきであり、この困難の原因は、マックスウェル-ローレンツ式による物質の微視的構造の把握がなかったこと、特に図5, 6等で述べた物質素片の切り取り方、更にその際微視的構造を考えると図11で述べたように式(39), (40)に現われる面積分の項を無視することの出来る事情等の認識の不十分性と今一つ電場の存在の下での流体内の圧力の解釈に対する多少の不備によるものであると考えられる。

ただし、式(150)の関係を(65)式の誘導形

$$\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{E} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \nabla p \quad (151)$$

に代入すると、

$$\mathbf{F}_v = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right) - \nabla p. \quad (152)$$

飯田修一

となる。これは(64)式と本質的に同等である。ただし既に述べたように体積力としての電気力と、圧力の勾配としての力が混合して区別されなくなるし、又電歪効果の微少な補正項も(150)式のように取り出されてはいないことを注意する。又勿論(152)式は $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ の仮定の必要な特殊解であるのに対し、(151)式はそんな条件のない一般式である。

(102)式、(122)式より、体系の全エネルギー $U$ は

$$U = U_{E1} + U_{E1-Me} = \iiint \frac{\mathbf{E}^2}{2} dV + \sum_{\nu} u''(\mathbf{r}_{\nu}, V_{\nu}) \frac{p_{\nu}^2}{2} + \sum_{\nu} u^0(\mathbf{r}_{\nu}, V_{\nu}) \quad (153)$$

となる。 $E1-Me$ はElectro-Mechanicalの意である。さて

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} dV &= \iiint \frac{1 + \frac{\tau_{\nu}}{m_{\nu}} \frac{1}{u''}}{2} \mathbf{E}^2 dV = \iiint \frac{\mathbf{E}^2}{2} dV + \iiint \frac{1}{2} \frac{\tau_{\nu}}{m_{\nu}} u'' p_{\nu}^2 dV \\ &= U - \sum_{\nu} u^0(\mathbf{r}_{\nu}, V_{\nu}) \end{aligned} \quad (154)$$

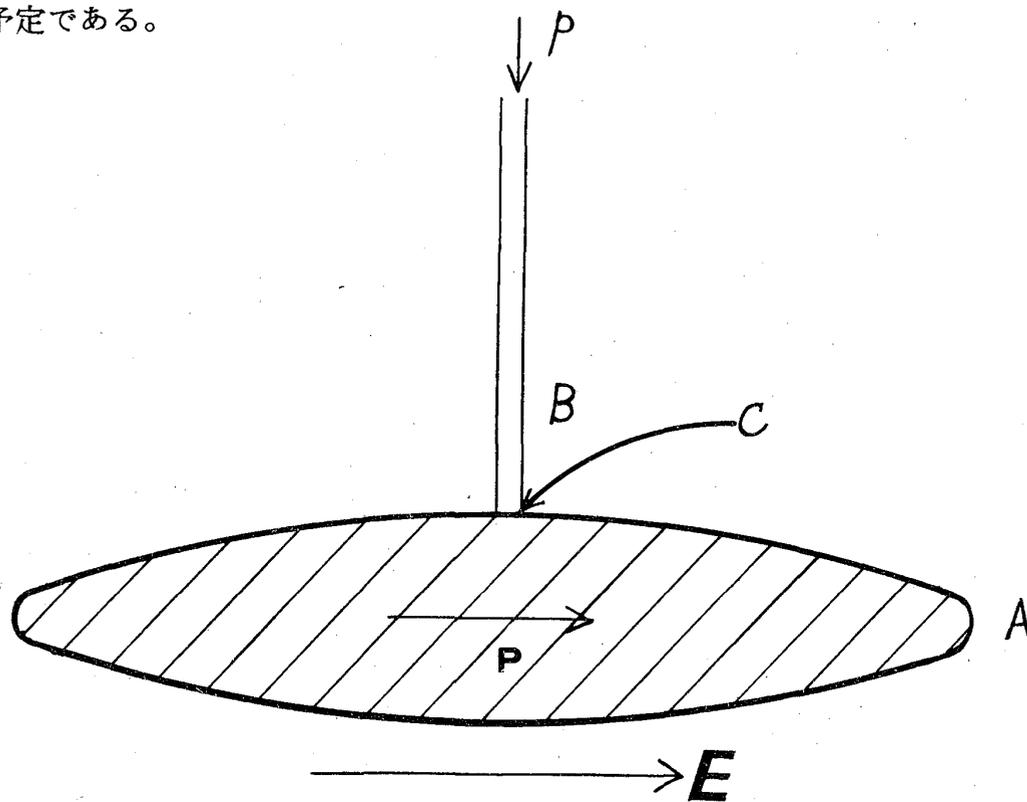
となる。これで、古典電磁気学で考えたエネルギー $\epsilon \mathbf{E}^2/2$ の意味が明確化された訳である。即ち、式(153)の全エネルギーから、 $\sum_{\nu} u^0(\mathbf{r}_{\nu}, V_{\nu})$ という、もし電歪現象が存在すると、(126)式のように本質的に混合する項を引き去った残りになっているのである。この項から、式(152)の $p_0$ がでることは既に述べた通りである。

電場中にある電媒質流体中で流体圧が(150)式のように定義できるかという問題が別に存在する。これは熱力学的には(126)式の問題であって疑義はない。又実験上も、例えば圧力下の電媒定数 $\epsilon$ の測定等は図26のような形で行うことができる。こゝでAは楕円体状の容器で、Bはその中腹に立てられた加圧パイプである。電媒質はA内に丁度Bとの接合点Cで、液が楕円体を形成するように充され、又その状態を保つよう流体の量を調節しながら、 $\epsilon$ の十分小さい気体の圧力によって、パイプBから加圧すれば、その $p$ はこゝでいう圧力 $p$ である。理由は、面Cでは、分極 $\mathbf{P}$ と面が平行なので、式(51), (54)に従う表面電気力があらわれないから、印加した圧力 $p$ が、単純に流体に働いていると考えることが出来るからである。

この解説の説明は多少、必要以上に色々と面倒に書いていると思われる人達も居られると思われる。しかし一応古典的に確立されたと考えられてい概念に変更を加えること

物質に働く電磁力と電磁エネルギーの正しい理解については、相当の色々な反論を予想しなければならないので、筆者として留意した次第である。

なお、Ⅱ章に対応する磁気エネルギーの微視的構造よりの検証は、電子スピンの電流モデルやその反磁性といった現在常識的でない新しい概念を駆使する必要があるが、筆者としては完成させているが、本稿の数倍の長さを要するので、稿を改め英文で発表する予定である。



第 2 6 図

## 謝 辞

本稿の考究過程で東京大学物理学教室、私の研究室の諸君その他の間で多くの討論があった。又電媒質流体に対する電気力の表現に関し、高橋秀俊教授との間で有効な討論があった。いずれも本稿の完成に大きい貢献をしているので、厚く御礼申し上げる。

## 附 記

こうした種類のオリジナルな論文を発表するジャーナルが日本にないのが現状である。それで筆者はこの論文をそのまま正式発表として普通に引用する心算である。読者諸子もそうされても筆者としては全く差支えないことを附記させて戴く。

## 文 献

- 1) W.Heitler : "The Quantum Theory of Radiation" Oxford at the Clarendon Press (1954) § 1, § 2.
- 2) S.Podolsky and K.S. Kunz :  
"Fundamentals of Electrodynamics",  
Marcel Dekker, New York and London (1969) Chap V.
- 3) G. H. Wannier : Phys, Rev. **72** (1947) 304.
- 4) S.Iida : J.Phys, Soc. Japan, to be published.
- 5) 飯田修一 : 1972 年春 日本物理学会分科会予稿集**3** (1972) P 151.
- 6) 飯田修一 : 1972 年秋 日本物理学会年会予稿集**3** (1972) P 121.
- 7) S.Iida : AIP Conf. Proceedings, **10** (1973) 567.
- 8) J.H.Van Vleck : "The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities"  
Oxford at the Clarendon Press (1932) Chap. I.
- 9) L.D.Landau and E.M.Lifshitz : "Electrodynamics of Continuous Media"  
Pergamon Press, Oxford · London · New York · Paris (1960) P 1, P 113.
- 10) W.K.H. Panofsky and M.Philips :  
"Classical Electricity and Magnetism", 2nd Edit. Addison-Wesley Pub.  
Co. (1962) P 191, 377.
- 11) L.D.Landau and E.M.Lifshitz : "The Classical Theory of Fields" Third  
Revised English Edition, Pergamon Press, Oxford, New York et al.,  
(1971) P 82.
- 12) Ref. 7) P 31.
- 13) J.Aharoni : "The Special Theory of Relativity" Oxford at Clarendon  
Press (1965).
- 14) 富山小太郎 : "電磁気学" 岩波 (1971) P 299.
- 15) Ref. 10), P 385, 379, 381.
- 16) A.Gamba : Am. J. Physics, **35** (1967) 83.
- 17) F.Rohrlich : "Classical Charged Particles" Addison-Wesley Pub. Co.

- INC., Reading, Mass. (1965) P 13, 130.
- 18) S. Iida: to be published in future. Poincaré's Paradox は今迄の研究では十分に解明されていないと考える。Ref. 16), 17) はその一面を明らかにしているだけであると思っている。新しい考え方は電子の永久電流モデルの報告の中で行う予定である。
  - 19) J.D.Bjorken and S.D.Drell: "Relativistic Quantum Fields", McGraw-Hill Book Co., New York, etc., (1965) P 6.
  - 20) S.Iida: J. of Magnetism, to be published.
  - 21) 飯田修一: 日本物理学会誌 22 (1967) 128.
  - 22) 飯田修一, 藤川頼彦: 物性研究 12-6 (1969) 377.
  - 23) Ref. 10), P 110.
  - 24) Ref. 9), P 68.
  - 25) S. Iida: JJAP 11 (1972) 1223.