Tricritical point 近傍の臨界現象

東北大・工,[*] 東大物性研[**] 山崎義武,[*,**] 鈴木増雄[**]

くりこみ群の1種である Callan-Symanzik の関係を用いて二次相転移と三重臨界点近傍の相転移に対する臨界指数を導出したので報告する。

臨界現象は次元 d，内部自由度 N，potential range σ に依存するので，その依存性を導く目的で Brezin 等によって用いられた $\sigma=2$ の model を一般化して，二次相転移に対して N成分 real field φ_u の Lagrangian

$$L(x) = -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{d}(\partial_i^{\sigma/2}\varphi_u)^2 + m_u^2\varphi_u^2\right] - \frac{1}{4!}\, g_{1u}(\varphi_u^2)^2 - H\varphi_{u0}\ ,$$

三重臨界点の相転移に対して同様に,

$$L(x) = -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{d}(\partial_i^{\sigma/2}\varphi_u)^2 + m_u^2\varphi_u^2\right] - \frac{1}{4!}\, g_{1u}(\varphi_u^2) - \frac{1}{6!} g_{2u}(\varphi_u^2)^3 - H\varphi_{u0}$$

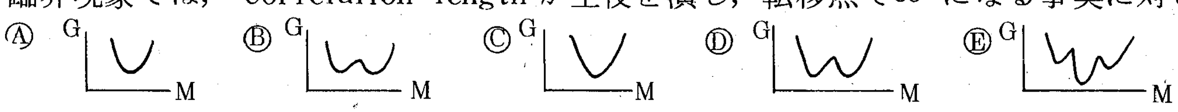
$[\varphi_u^2 = \varphi_{u0}^2 + \sum_{\theta=2}^{N}\varphi_{u\theta}^2]$ を用いる。系の自由エネルギーGが得られたとすると renormalized quantities $m^2(T)$, $g_1(T)$, $g_2(T)$, φ を使って， relevant para-meter [（温度 T）;（温度 T と non ordering field $\hat{g}$）]を考慮して,前者と後者の場合

$$G(M, T) = G_c(T) + \frac{1}{2!}m^2(T)M^2 + \frac{1}{4!}g_1(T)M^4 + \cdots$$

$$G(M, T, \hat{g}) = G_c(T, \hat{g}) + \frac{1}{2!}m^2(T, \hat{g})M^2 + \frac{1}{4!}g_1(T, \hat{g})M^4 + \frac{1}{6!}g_2(T, \hat{g})M^6 + \cdots$$

の形で得られる。ここに $M=\langle\varphi\rangle$。これらの式に於て……の部分を無視して各式の最高次の係数を正に取るとGは前者では， A と B ；後者では C ， D と E の場合が存在する。二次相転移では $m^2(T_c)=0$ により T_c が，三重臨界点の相転移では $g_1(T_t, \hat{g})=0$ と $m^2(T_t, \hat{g})=0$ により T_t と $\hat{g}_t$ が決る。

臨界現象では， correlalion length が主役を演じ，転移点で∞ になる事実に対して



最も適していると考えられる（Lagrangian の系に scale 変換をして導かれる）Callan－Symanzik の関係を用いて次のように臨界指数を導くことが出来た。

《二次相転移》

$$\eta=\varepsilon^{2}\frac{N+2}{2(N+8)^{2}}\left[1+\varepsilon\left\{\frac{6(3N+4)}{(N+8)^{2}}-\frac{1}{4}\right\}\right]+O(\varepsilon^{4}),$$

$$\gamma=1+\varepsilon\frac{N+2}{2(N+8)}+\varepsilon^{2}\frac{(N+2)(N^{2}+22N+52)}{4(N+8)^{3}}+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\varphi=1+\varepsilon\frac{N}{2(N+8)}+\varepsilon^{2}\frac{N(N^{2}+24N+68)}{4(N+8)^{3}}+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\alpha=\varepsilon\frac{4-N}{2(N+8)}-\varepsilon^{2}\frac{(N+2)^{2}(N+28)}{4(N+8)^{3}}+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\nu=\frac{1}{2}\left[1+\varepsilon\frac{N+2}{2(N+8)}+\varepsilon^{2}\frac{(N+2)(N^{2}+23N+60)}{4(N+8)^{3}}\right]+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left[1-\varepsilon\frac{3}{N+8}+\varepsilon^{2}\frac{(N+2)(2N+1)}{(N+8)^{3}}\right]+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\delta=3+3+\varepsilon^{2}\frac{N^{3}+21N^{2}+162N+464}{2(N+8)^{3}}+O(\varepsilon^{3}).$$

$$\omega=\varepsilon-\varepsilon^{2}\frac{3(3N+14)}{(N+8)^{2}}+O(\varepsilon^{3}),$$

上で，$\sigma=2$，$\varepsilon\equiv 4-d$，Wilson，Brezin et al. の結果から導入

$$\eta=2-\sigma\quad,$$

$$\gamma=1+\varepsilon\frac{N+2}{\sigma(N+8)}\left[1+\varepsilon\left\{\frac{\eta N+20}{(N+8)^{2}}\Psi+\frac{N+2}{\sigma(N+8)}\right\}\right]+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\varphi=1+\varepsilon\frac{N}{\sigma(N+8)}\left[1+\varepsilon\left\{\frac{4(2N+\eta)}{(N+8)^{2}}\Psi+\frac{N+2}{\sigma(N+8)}\right\}\right]+O(\varepsilon^{3}),$$

$$\alpha = \varepsilon\frac{1}{N+8}\left[\frac{4-N}{\sigma}+\varepsilon\frac{1}{\sigma(N+8)}\left\{\frac{(N+2)(4-N)}{\sigma}-\frac{2(N+2)(\eta N+20)}{(N+8)}\Psi\right\}\right]+O(\varepsilon^3),$$

$$\nu = \frac{1}{\sigma}+\varepsilon\frac{N+2}{\sigma^2(N+8)}\left[1+\varepsilon\left\{\frac{7N+20}{(N+8)^2}\Psi+\frac{N+2}{\sigma(N+8)}\right\}\right]+O(\varepsilon^3),$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left[1-\varepsilon\frac{6}{\sigma(N+8)}+\varepsilon^2\frac{1}{\sigma(N+8)}\left\{\frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^2}\Psi-\frac{6(N-4)}{\sigma(N+8)}\right\}\right]+O(\varepsilon^3),$$

$$\delta = \frac{3\sigma-\varepsilon}{\sigma-\varepsilon},$$

$$\omega = \varepsilon-\varepsilon^2\frac{2(5N+22)}{(N+8)^2}\Psi+O(\varepsilon^3), \qquad \Psi \equiv \phi(\sigma)-2\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)+\phi(1)$$

上で， $\sigma \neq 2 \qquad \varepsilon \equiv 2\sigma-d$

《三重臨界点の相転移》

$$\eta_t = \varepsilon_t^2\frac{(N+2)(N+4)}{12(3N+22)^2}+O(\varepsilon_t^3),$$

$$\gamma_t = 1+\varepsilon_t^2\frac{5(N+2)(N+4)}{8(3N+22)^2}+O(\varepsilon_t^3),$$

$$\varphi_t = 1+\varepsilon_t^2\frac{5N(N+4)}{8(3N+22)^2}+O(\varepsilon_t^3),$$

$$\alpha_t = \frac{1}{2}+\varepsilon_t\frac{1}{2}-\varepsilon_t^2\frac{(N+2)(N+4)}{(3N+22)^2}+O(\varepsilon_t^3)$$

$$\nu_t = \frac{1}{2}+\varepsilon_t^2\frac{(N+2)(N+4)}{3(3N+22)^2}+O(\varepsilon_t^3)$$

$$\beta_t = \frac{1}{4}\left[1-\varepsilon_t+\varepsilon_t^2\frac{3(N+2)(N+4)}{16(3N+22)^2}+O(\varepsilon_t^3)\right]$$

$$\delta_t = 5+\varepsilon_t\,4+\varepsilon_t^2\,4\left[1-\frac{(N+2)(N+4)}{8(3N+22)^2}\right]+O(\varepsilon_t^3)$$

$$\omega_t = \varepsilon_t\,2+O(\varepsilon_t^2)$$

上で， $\sigma=2$， $\varepsilon_t \equiv 3-d$

$$\eta_t = 2 - \sigma,$$

$$\gamma_t = 1 + \varepsilon_t^2 \frac{5\Gamma(\frac{1}{2})^4 \Gamma(\frac{\sigma}{2})^3}{2\sigma^3 \Gamma(\frac{3}{4}\sigma)\Gamma(\frac{\sigma}{4})^3} \frac{(N+2)(N+4)}{(3N+22)^2} + O(\varepsilon_t^3),$$

$$\varphi_t = 1 + \varepsilon_t^2 \frac{5\Gamma(\frac{1}{2})^4 \Gamma(\frac{\sigma}{2})^3}{2\sigma^3 \Gamma(\frac{3}{4}\sigma)\Gamma(\frac{\sigma}{4})^3} \frac{N(N+4)}{(3N+22)^2} + O(\varepsilon_t^3),$$

$$\alpha_t = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\sigma}{2} + \varepsilon_t - \varepsilon_t^2 \frac{15\Gamma(\frac{1}{2})^4 \Gamma(\frac{\sigma}{2})^3}{2^2\sigma^2 \Gamma(\frac{3}{4}\sigma)\Gamma(\frac{\sigma}{4})^3} \frac{(N+2)(N+4)}{(3N+22)^2}\right] + O(\varepsilon_t^3),$$

$$\nu_t = \frac{1}{\sigma}\left[1 + \varepsilon_t^2 \frac{5\Gamma(\frac{1}{2})^4 \Gamma(\frac{\sigma}{2})^3}{2\sigma^3 \Gamma(\frac{3}{4}\sigma)\Gamma(\frac{\sigma}{4})^3} \frac{(N+2)(N+4)}{(3N+22)^2}\right] + O(\varepsilon_t^3),$$

$$\beta_t = \frac{1}{2\sigma}\left[\frac{\sigma}{2} - \varepsilon_t + \varepsilon_t^2 \frac{5\Gamma(\frac{1}{2})^4 \Gamma(\frac{\sigma}{2})^3}{2^2\sigma^2 \Gamma(\frac{3}{4}\sigma)\Gamma(\frac{\sigma}{4})^3} \frac{(N+2)(N+4)}{(3N+22)^2}\right] + O(\varepsilon_t^3),$$

$$\delta_t = \frac{5\sigma - 2\varepsilon_t}{\sigma - 2\varepsilon_t},$$

$$\omega_t = \varepsilon_t 2 + O(\varepsilon_t^2)。$$

上で，$\sigma \neq 2$，$\varepsilon_t = \frac{3}{2}\sigma - d$

ヘリウムの場合，量子効果がきくなら N= 2，古典的振舞なら N＝1 である。出来るだけ多くの詳しい実験結果が待遠しい。三重臨界点の指数については間もなく ε_t の３次までの結果を発表出来る予定である。この研究を遂行する際，筆者の一人（Y. Y.）は中嶋貞雄，桂重俊両教授並びに猪苗代盛助教授の惜しみない御協力と御指導を受けてなされましたので謝意を表します。