輻射場のコヒーレンス

早大・理工　田中秀次郎
小 林 敏 夫

（1月7日受理）

§1. 序

コヒーレンスの問題を量子論的に取り扱った理論は，Glauber 等によって展開された[1~4)]。そして，近年その応用が，種々の分野でなされようとしている。又，光学的なコヒーレンスについては，良く知られており，それは，輻射場のゆらぎの統計的記述に関連している。そして，コヒーレンスの概念は，光の干渉と結びついて形成されてきた[5)]。

Glauberによって展開された理論では，コヒーレント状態のひとつとして，光子の消滅演算子の固有状態を導いた。そして，輻射場の相関関数の次数と対応した，高次のコヒーレンスという概念を導入した。しかし，この理論でコヒーレンスの概念を明確にすることは，次の理由で不十分と思われる。輻射場がコヒーレンスである条件が，必要条件にすぎないこと。高次のコヒーレンスの物理的意味，及び，コヒーレンスと光子の位相との間の関係が不明確であること。

ここでは，輻射場がコヒーレンスである必要十分条件をもとめる。次に，その条件からコヒーレント状態が，光子の消滅演算子の固有状態以外に存在しないことを示す。さらに，コヒーレンスを定義するのに，Glauberの導入した高次のコヒーレンスという概念が，不必要であることを示す。

§2. Glauber のコヒーレンス理論

ここでは，Glauberの理論に従って[1~4)]，コヒーレントな輻射場の定義とその条件を述べる。

一般に，輻射場のn次の相関関数は

$$G^{(n)}(x_1 \cdots x_n, x_{n+1} \cdots x_{2n}) = \mathrm{Tr}\{\rho E^{(-)}(x_1) \cdots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \cdots E^{(+)}(x_{2n})\} \tag{2-1}$$

で与えられる。ただし

$$E^{(+)}(x) \equiv E^{(+)}(r\,t) = i\sum_k \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{\frac{1}{2}} a_k u_k(r) e^{-i\omega_k t} \quad (2-2a)$$

$$E^{(-)}(x) \equiv E^{(-)}(r,t) = -i\sum_k \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{+} u_k^{*}(r) e^{i\omega_k t} \quad (2-2b)$$

である。ここで，a_k は光子の消滅演算子で，次の交換関係をみたす。

$$[\, a_k, a_j^{+} \,] = \delta_{k,j} \quad , \quad [\, a_k^{+}, a_j^{+} \,] = [\, a_k, a_j \,] = 0 \qquad (2-3)$$

(2-1)式を用いて

$$g^{(n)}(x_1 \cdots x_{2n}) = \frac{G^{(n)}(x_1 \cdots x_n, x_{n+1} \cdots x_{2n})}{\prod_{j=1}^{2n} \{ G^{(1)}(x_j, x_j) \}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2-4)$$

なる関数 $g^{(n)}(x_1 \cdots x_{2n})$ を定義する。

コヒーレンスに対する必要条件は，すべての次数nに対し次の関係式が成り立つことであると，Glauber は定義している。

$$|\, g^{(n)}(x_1 \cdots x_{2n}) \,| = 1 \quad , \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \qquad (2-5)$$

この(2-5)式と同値な式

$$G^{(n)}(x_1 \cdots x_n, x_{n+1} \cdots x_{2n}) = \varepsilon^{*}(x_1) \cdots \varepsilon^{*}(x_n)\, \varepsilon(x_{n+1}) \cdots \varepsilon(x_{2n}) \quad ,$$
$$(n=1,2,\cdots\cdots) \qquad (2-6)$$

を用いて，コヒーレントな輻射場を定義している。

すべての次数の相関関係が，(2-6)式のように factorize されるとき，その輻射場をコヒーレントという。そして，その状態を，完全なコヒーレント（ full coherent ）と呼んでいる。

n次のコヒーレンスとは，n次以下のすべての相関関数が，

$$G^{(j)}(x_1 \cdots x_{2j}) = \varepsilon^{*}(x_1) \cdots \varepsilon^{*}(x_j)\, \varepsilon(x_{j+1}) \cdots \varepsilon(x_{2j}) \quad , \quad (j \leq n) \quad (2-7)$$

を満たす輻射場であると定義している。そして，よく知られた young の干渉実験で，

干渉縞が最も鮮明になる輻射場は，一次のコヒーレントである。

光子の消滅演算子 a_k の固有状態を，$|\, a_k>$ とする。よって

$$a_k \,|\, \alpha_k> = \alpha_k \,|\, \alpha_k> \tag{2-8}$$

である。（2−2）式を用いれば，次式が成り立つ

$$E^{(+)}(x)\,|\{\alpha_k\}> = \varepsilon(x)\,|\{\alpha_k\}> \tag{2-9}$$

ただし

$$|\{\alpha_k\}> = \prod_k |\, \alpha_k> \tag{2-10}$$

$$\varepsilon(x) = i\sum_k\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_k U_k(r)e^{-i\omega_k t} \tag{2-11}$$

である。$|\ \{\alpha_k\}>$ なる状態であることは，（2−9）式を（2−6）式に代入すれば明らかかである。

しかし，$|\{\alpha_k\}>$ なる状態は，コヒーレンスの条件式（2−6）を満たす一例にすぎない。そこで，（2−6）式を満たす輻射場の密度行列を考察し，それが次の形をしていることを示した[4]。

$$\rho_{nn} = \frac{<m>}{n!}\quad e^{-\langle m\rangle} \tag{2-12}$$

ただし，$<m> = \mathrm{Tr}(\rho b^{+} b)$ ，$b = \sum_k \gamma_k^{*} a_k$ である。

このことより，密度行列の対角成分が Poisson 分布していることが，コヒーレンスの条件である。そして，非対角成分に関しては，何ら制限を課すものではないと述べている[4]。

§ 3. コヒーレンスの条件

ここでは，Glauber がもとめたコヒーレンスの必要条件（2−6）式にかわり，コヒーレンスの必要十分条件をもとめる。

電場の演算子 $E^{(+)}(x)$ を，次のように各モードの和の形に書きなおす。

$$E^{(+)}(x) = \sum_k E_k^{(+)}(x) \tag{3-1}$$

ただし

$$\overset{(+)}{E}_k(x) = i\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{\frac{1}{2}} a_k U_k(r) e^{-i\omega_k t} \qquad (3\text{-}2a)$$

$$\overset{(-)}{E}_k(x) = -i\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{\frac{1}{2}} a_k^{+} U_k^{*}(r) e^{i\omega_k t} \qquad (3\text{-}2b)$$

である。時空点 $x=(r, t)$ での輻射場の強度は

$$\begin{aligned} I(x) &= Tr\{\rho \overset{(-)}{E}(x)\overset{(+)}{E}(x)\} \qquad (3\text{-}3) \\ &= \sum_k Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_k(x)\} + 2Re\sum\sum_{k \neq j} Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_j(x)\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで，Re は実数部分をとることを示す。また，右辺の第二項目は，干渉をあらわしている項である。

ここで，光子の各々のモードの状態は，互に独立であるとする。よって，輻射場の密度演算子は

$$\rho = \prod_k \rho_k \qquad (3\text{-}4)$$

と書ける。

$$Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_j(x)\} = |Tr\, \rho \overset{(-)}{E}_k(P)\overset{(+)}{E}_j(x)|\, e^{i\varphi(k,j,x)} \qquad (3\text{-}5)$$

と書くと，（3−3）式は

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_k Tr\{\rho_k \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_k(x)\} \\ &\quad + 2\sum\sum_{k \neq j} |Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_j(x)\}| \cos\varphi(k,j,x) \qquad (3\text{-}6) \end{aligned}$$

となる。干渉が最大となるのは，$|Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_j(x)\}|$ が最大になるときで，その値は，シュワルツの不等式からきまる。

$$|Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_j(x)\}|^2 \leqq \{[Tr\, \rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_k(x)][Tr\, \rho \overset{(-)}{E}_j(x)\overset{(+)}{E}_j(x)]\} \qquad (3\text{-}7)$$

上式で等号が成り立つとき，干渉が最大となる。つまり，

$$|Tr\{\rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_j(x)\}|^2 = \{[Tr\, \rho \overset{(-)}{E}_k(x)\overset{(+)}{E}_k(x)][Tr\, \rho \overset{(-)}{E}_j(x)\overset{(+)}{E}_j(x)]\} \qquad (3\text{-}8)$$

である。これを，（3−2）式を使って書きなおすと，

$$|[\mathrm{Tr}\,\rho_k a_k^+][\mathrm{Tr}\,\rho_j\, a_j]|^2 = [\mathrm{Tr}\,\rho_k a_k^+ a_k][\mathrm{Tr}\,\rho_j\, a_j^+ a_j] \quad (3\text{−}9)$$

となる。これより簡単に，次式がもとまる。

$$|\mathrm{Tr}\{\rho_k a_k^+\}|^2 = \mathrm{Tr}\{\rho_k a_k^+ a_k\} \quad (3\text{−}10)$$

故に，輻射場が各モードに対して（3−10）式を満たすとき，その干渉が最大となる。これより厳密なコヒーレンスの定義を次のように定める。

輻射場の各モードに対して，（3−10）式を満たすとき，その輻射場をコヒーレントな輻射場という。

§ 4. コヒーレント状態

ここでは，コヒーレンスの必要十分条件（3−10）式を満たす輻射場をもとめる。そして，コヒーレント状態は，光子の消滅演算子の固有状態以外ないことを示す。

k番目のモードだけが励起されている輻射場について考える。（3−10）式を書きなおすと

$$\mathrm{Tr}\{\rho_k(a_k^+ - \alpha_k^*)(a_k - \alpha_k)\} = 0 \quad (4\text{−}1)$$

となる。ただし，$\alpha_k = \mathrm{Tr}(\rho_k a_k)$，$\alpha_k^* = \mathrm{Tr}(\rho_k a_k^+)$ である。ここで，$A = a_k^+ - \alpha_k^*$，$A^+ = a_k^+ - \alpha_k^*$ と変換すると（4−1）式は

$$\mathrm{Tr}\{\rho_k A^+ A\} = 0 \quad (4\text{−}2)$$

となる。Aと任意の演算子Bに対して，シュワルツの不等式より，次の不等式が成り立つ。

$$\{\mathrm{Tr}(\rho_k A^+ A)\}\{\mathrm{Tr}\,\rho_k B^+ B\} \geqq |\mathrm{Tr}\{\rho_k A^+ B\}|^2 \quad (4\text{−}3)$$

（4−2），（4−3）式より

$$\mathrm{Tr}(\rho_k A^+ B) = \{\mathrm{Tr}(\rho_k A^+ B)\}^+ = 0 \quad (4\text{−}4)$$

が成り立つ。Bは任意の演算子であるから

$$\rho_k A^+ = A\rho_k = 0 \qquad (4-5)$$

が成立する。A^+，A の定義より（4−5）式は

$$\rho_k a_k^+ = \rho_k \alpha_k^* \quad , \quad a_k \rho_k = \alpha_k \rho_k \qquad (4-6)$$

となる。これより

$$\begin{aligned}\rho_k &= \sum_{n,m} |n\rangle_k {}_k\langle n|\rho_k|m\rangle_k {}_k\langle m| \\ &= \langle vac|\rho_k|vac\rangle \sum_n \frac{\alpha_k^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle_k \sum_m {}_k\langle m|\frac{(\alpha_k^*)^m}{\sqrt{m!}}\end{aligned} \qquad (4-7)$$

がもとまる。規格化の条件 $Tr\rho = 1$，を満たすためには

$$\langle vac|\rho_k|vac\rangle = \exp(-|\alpha_k|^2) \qquad (4-8)$$

である。したがって，（3−10）を満たすコヒーレントな輻射場は

$$\rho_k = |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| \qquad (4-9)$$

ときまる。ただし

$$|\alpha_k\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha_k|^2)\sum_n \frac{\alpha_k^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle_k \qquad (4-10)$$

である。（4−10）式より

$$a_k|\alpha_k\rangle = \alpha_k|\alpha_k\rangle \qquad (4-11)$$

が成り立つ。

故に，コヒーレントな輻射場は，各モードごとに光子の消滅演算子の固有状態であらねばならない。

§5. 結　論

Glauber によってもとめられた（2−6）式は，輻射場がコヒーレンスであるための

必要条件にすぎない。そのため，（2−6）式よりきまる状態は，（2−12）式で表わされる状態となり，一般的にコヒーレント状態と呼ばれている光子の消滅演算子の固有状態に限定しえない。ここでは，（2−6）式にかわりコヒーレンスであるための必要十分条件（3−10)式をもとめた。そして（3−10)式を満足する状態，つまり，コヒーレント状態は光子の消滅演算子の固有状態以外にはないことを示した。さらに，コヒーレンスを定義するとき，Glauber が導入した「高次のコヒーレンス」の概念も不必要であることを示した。なお，コヒーレンスと位相のゆらぎとの関係については，次の論文に譲る。

謝　辞

指導をいただいた加藤鞆一教授と指導と有益な討論をしてくれた清水敏寛氏に，深く感謝申し上げます。

文　　献

1） R. J. Glauber, Phys. Rev. 130 2529 (1963).

2） R. J. Glauber, Phys. Rev. 131 2766 (1963).

3） U. M. Titulaer and R. J. Glauber, Phys. Rev. 140 B676 (1965).

4） U. M. Titulaer and R. J. Glauber, Phys. Rev. 145 1041 (1966).

5） L. Mandel and E. Wolf, Rev. Mod. Phys. 37 231 (1965).

6） R. J. Glauber, Quantum Optics and Electronics (Gordon and Breach, New York, 1965), p.65.