10) T.Tajima, S.Ichimaru, and T.Nakano, "Energy Transfer Equation and Universal Spectrum of Ion-Acoustic Wave Turbulence", Plasma Theory Group Preprint No. 6, to be published in J.Plasma Phys.

11) S.Ichimaru and T.Tange, J.Phys. Soc. Japan 36 (1974), February issue.

12) T.Tange and S.Ichimaru, "Theory of Anomalous Resistivity and Turbulent Heating in Plasmas", Plasma Theory Group Preprint No. 8, to be published.

13) J.Hubbard, Phys. Letters 25A (1967), 709.

14) K.S.Singwi, M.P.Tosi, R.H.Land, and A.S.Sjölander, Phys. Rev. 176 (1968), 589.

15) T.O'Neil and N.Rostoker, Phys. Fluids 8 (1965), 1109.

16) R.Abe, Prog. Theor. Phys. 21 (1959), 475.

17) S.G.Brush, H.L.Sahlin, and E.Teller, J.Chem. Phys. 45 (1966) 2102.

18) Yu.L.Klimontovich, Sov. Phys. JETP 35 (1972), 920.

19) M.Shibata and S.Ichimaru, Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 1120.

フォノンの非線形相互作用

日電中研　中 村 紀 一

§1 序 論

伝導電子のドリフト速度が音速を超えるとき起るフォノンの増幅現象は CdS や GaAs のような圧電性半導体で観測される。増幅は波動ベクトルがドリフト速度のまわり約10°の狭いチェレンコフ・コーンの中にあるフォノンで起り，そのエネルギーは熱平衡の $10^6 - 10^8$ 倍になる(第1図[1])。

増幅が更に進むとフォノンの間に強い非線形相互作用が現われ系は熱平衡から大きく

ずれた状態へ移る。第2図は増幅フォノンの周波数スペクトル(エネルギー分布)の時間発展のブリルアン散乱による測定結果[2)]で，増幅の進行につれてスペクトルが低周波側へシフトする。これはパラメトリック共鳴によって低周波フォノンの増幅が強められるためである。[3)]

低温での GaAs や InSb のような高い易動度の半導体($q\ell > 1$，ここで q はフォノンの波数，ℓ は電子の平均自由行程)でのフォノンの増幅機構は室温での C_dS や GaAs のような低い易動度の半導体($q\ell < 1$)のそれと異る。[4)] ここでは高い周波数のフォノンが増幅される。第3図は18°K での GaAs のスペクトルをX線散乱の方法で測定した結果である。[5)] Aが線形増幅によるピークで，これの第2高調波がBで観測される。低周波フォノンの振舞はスペクトルの時間発展が測定されていないので分らないが，第2図との比較から $q\ell > 1$ でも低周波フォノンの増幅が次第に優ってくることが想像される。

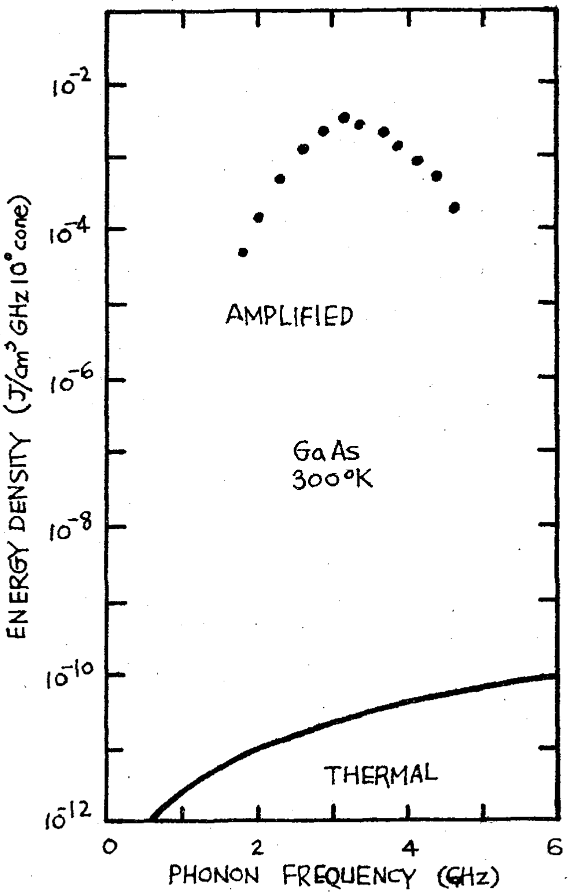

図1　増幅フォノンのエネルギー分布[1)]

このように増幅フォノン系では非線形効果によって熱平衡から大きくずれた状態が実現される。フォノン増幅は非線形効果が強く働いている非平衡状態の統計物理をつくるための具体的研究対象と考えられる。我々の目的は増幅フォノンの定常状態への接近のメカニズムと確率過程を明らかにすることである。

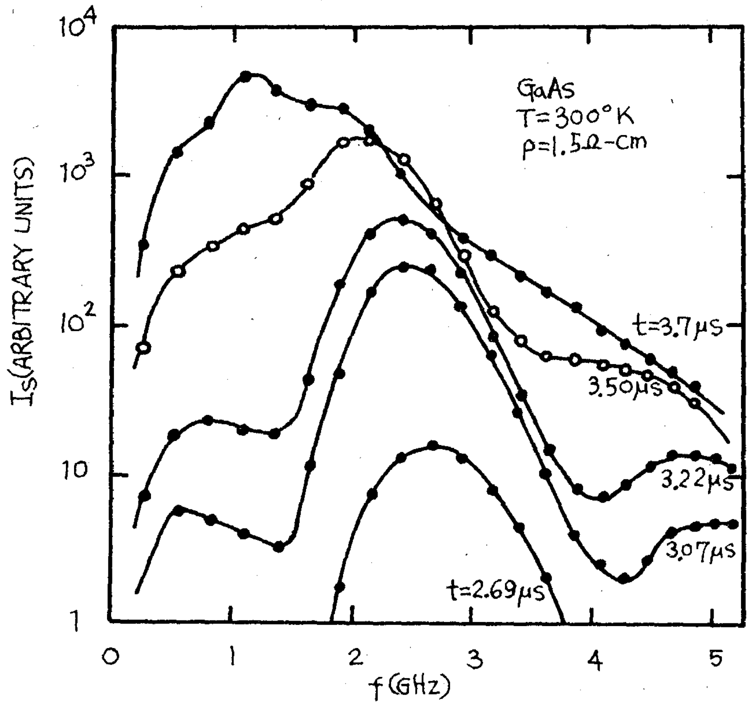

図２　　周波数スペクトルの時間発展[2)]

§２　非線形ランジュバン方程式

フォノンは古典的な場として取り扱われる。自己無撞着場の方法を用いて電子系を消去すると，フォノン振幅 $u_q(t)$ に対して次の運動方程式が得られる。[6)]

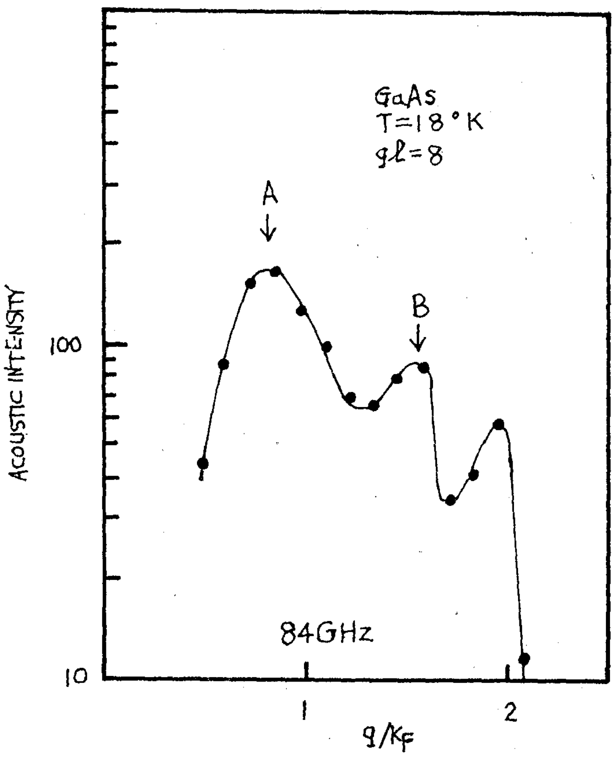

図３　高周波フォノンの周波数スペクトル[5)]

$$\frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2} + \omega_q^2 u_q + K^2 \omega_q^2 \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} u(q\omega)/\varepsilon(q\omega) =$$

$$= \sum_{q'} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty+ic'}^{\infty+ic'} \frac{d\omega'}{2\pi} M(q\omega; q'\omega') u(q-q', \omega-\omega') u(q'\omega') \tag{1}$$

ここで $u(q\omega)$ は $u_q(t)$ のラプラス変換である。左辺の第3項は伝導電子との相互作用によるフォノンの線形増幅又は減衰を表わす。K は相互作用常数，$\varepsilon(q\omega)$ は誘電応答関数である。右辺はモード coupling を表わす。$\omega\tau_c \gg 1$（ここで，τ_c はフォノンの衝突時間）の場合には電子ーフォノンのハミルトニヤンを用いる量子力学的計算によって（1）を容易に導くことができる。次にランジュバン化とマルコフ化を行って（1）を非線形ランジュバン方程式の型に書き換える。

u_q は電子のドリフト速度の方向に伝播するフォノン（u_+）と逆方向に伝播するフォノン（u_-）の振幅の和で表わされる：$u_q = a_q e^{-i\omega_q t} + a^*_{-q} e^{i\omega_{-q} t}$。しかし，逆方向のフォノンは熱平衡にあるから熱源と見做される。（1）の右辺の $u(q''\omega'')u(q'\omega')$ に於いて u_- を含む項を揺動力 R(t) と書く。又，u_+ の表現は $u_q \equiv u_+ = a_q e^{-i\omega_q t}$ と書いて $a_{-q} = a^*_q$，$\omega_{-q} = -\omega_q$ と定義する。

いま $q\ell \ll 1$ の場合を考えると，$\varepsilon(q\omega)$ は文献 7）の（3.7）で与えられる。これを使うと（1）の線形増幅の項（左辺の第3項）は観測時間 t が $1/\omega_p^2 \tau_c \sim 10^{-8}$ sec（ω_p はプラズマ振動数）よりも長いので $u_q(t)/\varepsilon_q$ と近似される，ここで $\varepsilon_q = \varepsilon(q\omega_q)$。これが増幅のマルコフ化で，この結果は $u(q\omega) \to u_q(t)$，$\varepsilon(q\omega) \to \varepsilon(q\omega_q)$ と云う置き替えに相当する。同様の置き替えを（1）の右辺に適用すると3モード coupling は $M_{q,q'} u_{q-q'}(t) u_{q'}(t)$ のようにマルコフ化される，ここで $M_{q,q'} = M(q\omega_q; q'\omega_{q'})$。次に $\alpha_q \ll \omega_q$ とすると $\ddot{u}_q = -2i\omega_q(\dot{u}_q + i\omega_q u_q) - \omega_q^2 u_q$ と近似できる。これらの結果を使えば（1）は非線形ランジュバン方程式の型に書かれる：

$$\frac{\partial u_{\mathbf{q}}}{\partial t} + i(\omega_{\mathbf{q}} + i\alpha_{\mathbf{q}})u_{\mathbf{q}} = R_{\mathbf{q}}(t) + \sum_{(\mathbf{q}=\mathbf{k}+\mathbf{p})} V_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{p}} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{p}} \tag{1}$$

$\alpha_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}K^2 \omega_{\mathbf{q}} \mathrm{Im}(1/\varepsilon_{\mathbf{q}})$ は線形増幅率である。[4] (1) はフォノンの非線形動力学を記述するモデル方程式である。

§3 定常状態への接近

実験ではスペクトル関数 $I_{\mathbf{q}} = \langle |u_{\mathbf{q}}(t)|^2 \rangle$ の時間発展が測定される。$I_{\mathbf{q}}$ は $I_{\mathbf{q}} = (\hbar/2V\rho|\omega_{\mathbf{q}}|)N_{\mathbf{q}}$ によってフォノン分布関数 $N_{\mathbf{q}}$ と関係する。さて増幅フォノンの定常状態への接近のメカニズムとエネルギー分布は原理的には $I_{\mathbf{q}}$ の kinetic equation から知られる。kinetic equation は始めに，差分方程式で求め，次に時間について適当な coarse graining（粗視化）をとることにより得られる。その差分方程式は $I_{\mathbf{q}}(t+\tau) = \langle \overline{|u_{\mathbf{q}}(t+\tau)|^2}^{u(t)} \rangle$ である。$-u(t)$ は時間区間 τ での遷移確率 $P(u, t \mid u', t+\tau)$ による条件付平均を表わす。

(1) の摂動論を考える。$R_{\mathbf{q}}$ はガウス的と仮定される：$\overline{R^*_{\mathbf{q}}(t) R_{\mathbf{q}'}(t')} = 2\sigma_{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \delta(t-t')$。時間区間 τ の粗視化を $\omega_{\mathbf{q}}^{-1} \ll \tau \ll \alpha_{\mathbf{q}}^{-1}$ と選びフォノン振幅について RPA を仮定すると，差分方程式からボルツマン方程式が得られる，

$$\frac{\partial I_{\mathbf{q}}}{\partial t} = 2\sigma_{\mathbf{q}} + 2\alpha_{\mathbf{q}} I_{\mathbf{q}} + \sum_{(\mathbf{q}=\mathbf{k}+\mathbf{p})} \mathrm{Re}\left[\frac{8iV_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{p}} V_{\mathbf{p},-\mathbf{k},\mathbf{q}}}{(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{p}}) + i\delta}\right] I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{q}}$$

$$+ \sum_{(\mathbf{q}=\mathbf{k}+\mathbf{p})} 4\pi |V_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{p}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{p}}) I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{p}} \tag{2}$$

プラズマの current−driven turbulence はフォノン増幅とよく似ているが，Kadomtsev スペクトル $I_{\mathbf{q}} \sim q^{-3} \ln(1/qD)$ は (2) の定常解として得られる。[8] これは実験とよく一致する。しかしフォノン増幅では (2) は使えない。$q\ell \ll 1$ の場合を考えると，$V_{\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{p}} = iV_0/q\varepsilon_{\mathbf{q}}\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}$ である。[6] $\varepsilon_{\mathbf{q}} = 1 + (q_D/q)^2$ で q_D はデバイ波数。これを (2) の右辺の第3項（パラメトリック効果）に代入し，チェレ

ンコフ・コーンの角が小さいとして計算すると常に負で減衰作用をする。[3] これは第4図の実験結果と矛盾する。実験では単一周波数 f_p のドメイン（SFD）をつくり，周波数スペクトルの時間発展を測定する。$\frac{1}{2}f_p$ のフォノンが急速に励起する。

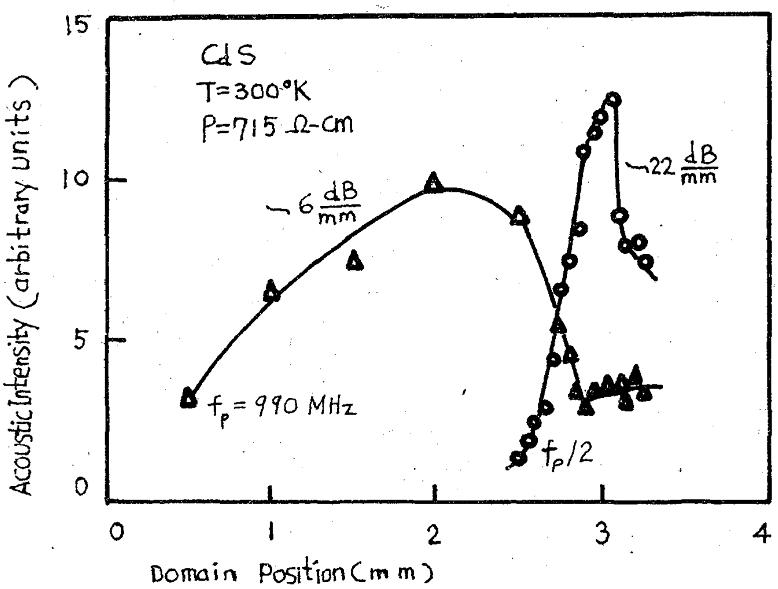

図4　Single Frequency Domain（SFD）のスペクトル変化[3]

いま，非摂動論の試みとして文献 9）の差分方程式（3）を $q\ell \ll 1$ の場合に応用する。時間の粗視化を $\omega_{\mathbf{q}}^{-1} \ll \tau \ll \alpha_{\mathbf{q}}^{-1}$ のように選ぶと $\exp(-2\alpha_{\mathbf{k}}\partial/\partial s) \fallingdotseq 1$ と近似できる。（SFD）の実験[3] と同じようにモード $\mathbf{k}$ のみが励起しているとする。（3）の右辺の第1項はパラメトリック効果を与えるが，分母の和で $\mathbf{k}<0$ からの寄与を無視する。そうすると kinetic equation でパラメトリック効果の項は $\pi\phi_R I_{\mathbf{q}}\delta(\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\phi_R})$ と計算される。

$\phi_R = 4V_0^2 I_{\mathbf{k}}/q(k-q)(\varepsilon_{\mathbf{q}}\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{q-k}})^2$ 又，$\omega=\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{q-k}}$。 $q>k$ 及び $k<0$ に対しては $\phi_R<0$ で δ 関数の中がノン・ゼロとなるからパラメトリック効果が消える。しかし，$q<k$ の低周波フォノンに対しては $\phi_R>0$ で，パラメトリック増幅が得られる。この結果は増幅フォノンの定常状態への接近を理解するためには非摂動論によらなければならないことを示唆する。

正しい kinetic equation はどうなっているのだろうか。RPA の仮定は正しいのだろうか。こういった問題は増幅系での確率過程を知ることにより解かれる。

§4　増幅系の確率過程

(I) は乱流,[10] レーザー,[11] 動的臨界現象[12]を記述するストカスチックなモード coupling 方程式と同じであるから，フォノン増幅はこれらの現象と深く係りあっているように思われる。そこで問題はフォノン増幅と云う半導体分野での問題から離れて非線形ランジュバン方程式 (I) で記述される増幅系 ($\alpha_q > 0$) の確率過程は何かと云う一般的な問題に拡張される。多モードの増幅系は，減衰系 ($\alpha_q < 0$) が熱平衡状態へ接近するのに対し，乱流状態と呼ばれる新しい状態へ移ることを予想させる。もし揺動力 R_q がガウス的であるなら問題は Fokker−Plank 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_q \frac{\partial}{\partial u_q}(\{-i(\omega_q + i\alpha_q)u_q + \sum_{(q=k+p)} V_{p,k,p} u_k u_p\}P\} + \sum_q \sigma_q \frac{\partial^2 P}{\partial u_q \partial u_q^*} \tag{II}$$

を解くと云う数学的問題[13]になるが恐らく数学的手法の開発だけでは片付かないだろう。何か物理的に新しい概念の導入が必要と思われる。熱平衡から大きくずれた非線形領域で起る最も特徴的な効果 (例へばパラメトリック共鳴や周波数混合効果) を十分に考慮した理論的取扱いが要求されるだろう。

参　考　文　献

1)　D.L.Spear: Phys. Rev. B2 (1970) 1931

2)　T.E.Parker and R.Bray: Phys. Letters 45A (1973) 347

3)　S.Zemon and J.Zucker: IBM J.Res. Developm. 13 (1969) 494

4)　J.Yamashita and K.Nakamura: Proc. Intern. Conf. Phys. of Semiconductors, Boston 1970, p.694

5)　D.G.Carlson and A.Segmüller: Phys. Rev. Letters 28 (1972) 175

6)　K.Nakamura: J.Phys. Soc. Japan 33 (1972) 1273

7)　K.Yamada: Phys. Rev. 169 (1968) 690

8)　M.Keilhacker and K.H.Steuer: Phys. Rev. Letters 26 (1971) 694

9)　K.Nakamura: Prog. Theor. Phys. 49 (1973) 361

10)　S.F.Edwards and W.D.McComb: J.Phys. A2 (1969) 157

11) H.Haken: Z.Physik 219 (1969) 246
12) K.Kawasaki: Ann. Phys. 61 (1971) 1
13) H.Haken: Z.Phys. 263 (1973) 267

ヒステリシス特性を持つ発振系のゆらぎ

東工大・電物　安 久 正 紘
寺 町 康 昌

最近電磁場の発振現象を熱平衡状態から非平衡定常状態への相転移の1種と見る観点が議論されている。実際，臨界点ゆらぎに対応して，発振点附近の異常ゆらぎがレーザー発振器の光子数ゆらぎ，ガン効果発振器の電流ゆらぎ，トンネルダイオードの電圧ゆらぎ等において観測されている。[1),2)] 発振現象を現象論的に分類すると（i）soft mode（ii）hard mode の2種類になる。前者は外部からのポンピングによって系を active な状態にすると発振振幅が零から徐々に増加する場合であり，後者は発振振幅が零から急激に有限振幅に立ち上がり，ポンピングの増加と減少に対しヒステリシス特性を示す。

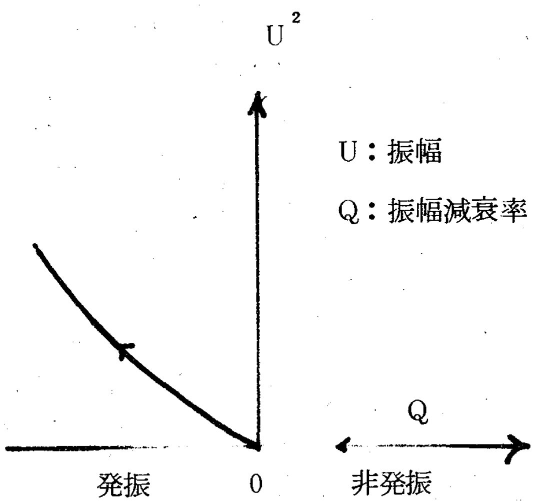

図1　ソフトモード

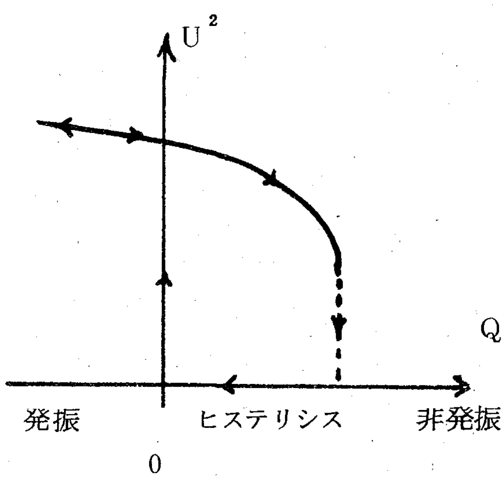

図2　ハードモード