

電気回路の発振とゆらぎ

東工大・理 川久保 達之

§1 はじめに

ここ数年来何人かの人によってレーザーや電気回路における発振を強誘電体や強磁性体のような平衡系における相転移と対比させて、非平衡系における相転移とみなす考えが主張されてきた。^{1~6)} この場合強誘電体の自発分極に相当するものは発振出力や発振電流であって、これらは“自発的な流れ”という意味で本質的に非平衡の問題である。与えられた温度における自発分極の値とそのまわりのゆらぎを支配しているものは自由エネルギーであるが、非平衡系においても、流れの値とそのまわりのゆらぎを支配している熱力学的関数のようなものがあるはずであるというのが、相転移と発振の類似性を説く立場に共通した主張である。

発振を一種の相転移と考えるならば、発振のしきい値の近傍で系の不安定性に伴って臨界点ゆらぎが観測されることが期待される。事実過去になされたレーザーや電氣的発振のゆらぎの観測結果を調べてみると、臨界点ゆらぎと思われるものがいくつか報告されている^{7~9)} のに気付く。最近われわれは上述の趣旨に沿って意識的にトンネルダイオード¹⁰⁾ ならびにウィーンブリッジ発振器¹¹⁾ について臨界点ゆらぎの測定を試み、ゆらぎの分散や critical slowing-down の様相を明らかにした。以下それらを中心に解説する。

§2 実験事実

周知のようにトンネルダイオードは図1の点線で示すような電流-電圧特性をもっていて、微分抵抗が負になる範囲で発振をおこす。以下の実験に用

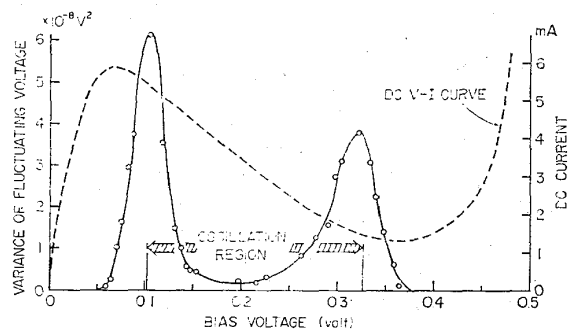


図1 トンネルダイオードの電圧ゆらぎの 2 kHz 成分の分散, 点線は直流の V-I 特性

いたトンネルダイオードは印加電圧が 0.1 ~ 0.33 volt の間で 200 kHz の発振を示したが、発生する雑音電圧のうち周波数選択増幅器によって 2 kHz の周波数成分だけを拾いだし、その分散をプロットしてみると図 1 に示すような結果が得られた。2 つの臨界点の近傍でゆらぎが著しく増加しており、それらに挟まれた発振領域では比較的小さくなっていることが判る。またこのような特定の周波数成分のゆらぎを波高分析器にかけて確率分布をとってみると図 2 に示すような結果になる。これは 0.1 volt の臨界点付近での分布であって、臨界点の上でも下でも分布はガウス型であるが、臨界

では著しく拡がりかつガウス型からずれている。

臨界点付近での分散の変化をもっと定量的に調べるために、発振の状態を制御しやすいウィーンブリッジ発振器についてフィードバックファクター β を変えて測定を行った。図 3 はウィーンブリッジ発振器のゆらぎの確率分布

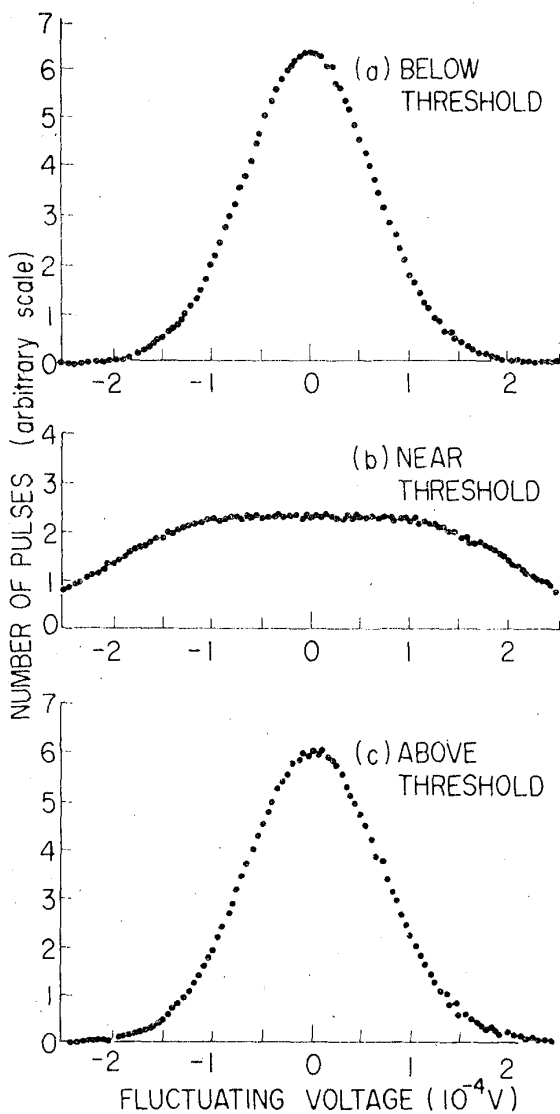


図 2 トンネルダイオードの電圧ゆらぎの 2 kHz 成分の確率分布

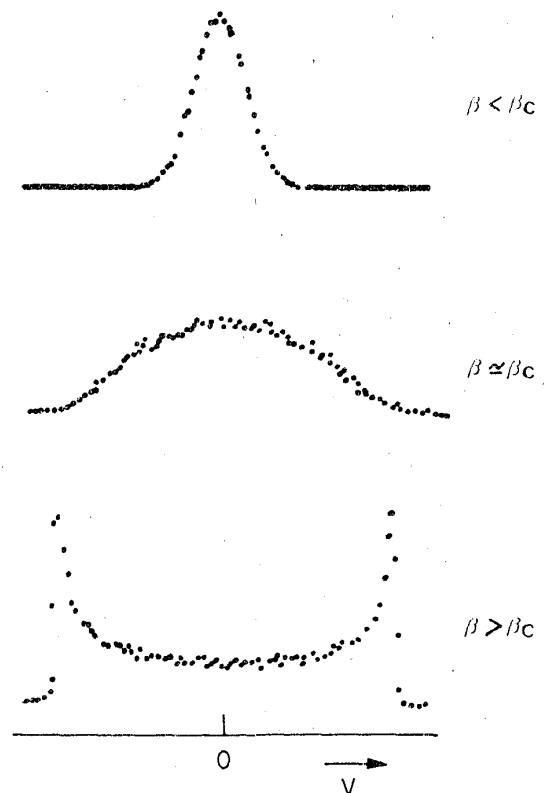


図 3 ウィーンブリッジ発振器の電圧ゆらぎの確率分布

らぎ電圧の確率分布である。これは図2の場合と違って周波数選択増幅器を通さずにすべての周波数成分を拾いあげているので β がしきい値 β_C を越えた発振領域では正弦波の確率分布が現われている。この図で $\beta > \beta_C$ 場合の横軸のスケールは他の2つの場合の $1/1000$ に縮めてある。このような確率分布からゆらぎの分散 $\langle v^2 \rangle$ を求めると、それは β が β_C に近づくにつれて急速に大きくなり、しかもその増加のしかたは $\beta_C - \beta$ に対して両対数目盛でプロットすると図4に示すように、 $1/(\beta_C - \beta)$ に比例していることが判る。これはちょうど強誘電体の誘電率が Curie-Weiss の法則に従うのと似ている。

つぎに相関計によって測定したゆらぎの相関関数 $\langle v(0)v(t) \rangle$ についての結果を示す。相関関数は振巾が指数関数的に減衰する周期関数として与えられるが、臨界点の極く近くでは指数関数からずれてくる。その様子は相関関数の包絡線を各 β に対してプロットした図5によって明らかである。この図の各直線の勾配から相関時間 τ を求めると、 β が β_C に近づくにつれて $\langle v^2 \rangle$ と同じように $1/(\beta_C - \beta)$ に比例して長くなっている。 τ が臨界点で長くなるのは相転移の場合にはよく知られている critical slowing-down の現象である。

以上は主に電圧の振巾ゆらぎに関係した

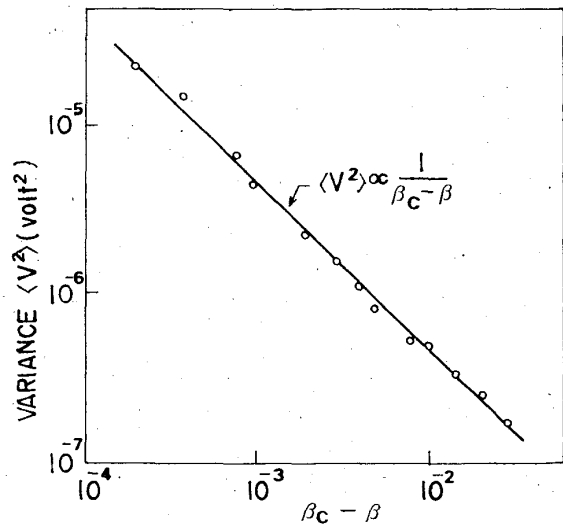


図4 ゆらぎの分散

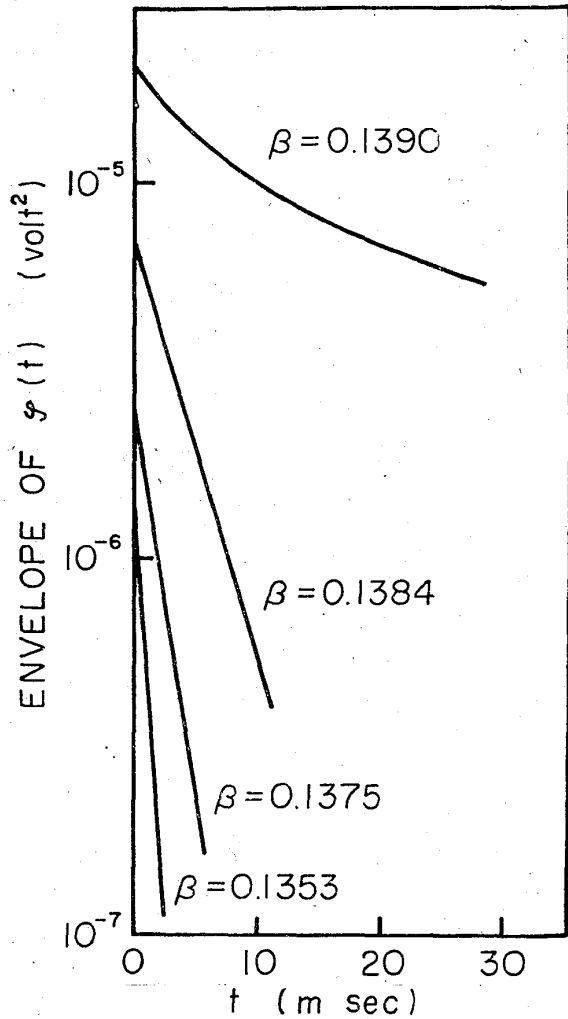


図5 ゆらぎの相関関数の包絡線

ものであったが、発振とは単にゆらぎの振巾が大きくなったものではない。コヒーレントになること、いいかえれば一度決った位相が長時間記憶されるようになることが本質的である。ウィーンブリッジ発振器の雑音出力をシンクロスコープで観測していると、非発振状態から発振状態へ近づくにつれて、臨界点以下でもある程度位相の揃った波形が現われるのが見える。現在位相ゆらぎそのものを定量的に測定することはできていないが、発振を ordered state と考えるとき位相ゆらぎに関する知識は重要であろう。

§ 3 確率過程としての発振現象

以上見てきた現象は平衡から著しくずれた系におけるゆらぎが、系の状態を支配するパラメーターの変化と共にコヒーレントな発振へと変わっていく過程を表わしている。従ってこれを理解するためには、発振を確率過程として扱うことが必要である。非線形性を含んだ系の確率過程は数学的に処理しにくい問題であって、van Kampen¹²⁾そして最近 Kubo^{13, 14)}などによって一般的な取り扱いが進められている。しかし、ここでは具体的なモデルとして van der Pol 型の非線形方程式に従う系に限って、ゆらぎの確率分布、分散などを求めてみよう。

いまガウス型の白色雑音 $f(t)$ の影響によってゆらいでいる雑音電圧 $v(t)$ に関する次の方程式を考える。

$$\ddot{v} + (\alpha + r v^2) \dot{v} + \omega_0^2 v = f(t) \quad (1)$$

ここで α は系が発振するか否かを定めるパラメーターであり、 $\alpha < 0$ の場合発振が起る。 $r v^2 \dot{v}$ は非線形項であり、 ω_0 は発振周波数である。極く最近、ウィーンブリッジ発振器の発振の様相は、この van der Pol 方程式の r を一定にして α だけ変えた形でかなりよく表現されることが判った。ゆらぎに関する (1) の微分方程式から Stratonovich¹⁵⁾ の手法によって振巾と位相に関する方程式を導く。発振が調和発振（弛緩発振でない）の場合を考えて、

$$v = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2)$$

とし、振巾 A 、位相 ϕ を確率変数と考える。また A や ϕ の時間的变化は ω_0 にくらべてゆっくりであるので（これは実験的に確かめられている）、

$$\dot{v} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (3)$$

とする。(2) と (3) より

$$A = \left(v^2 + \frac{\dot{v}^2}{\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

が得られ、これから (1) を用いて

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\dot{v}}{\omega_0^2 A} (\ddot{v} + \omega_0^2 v) \\ &= \frac{\dot{v}}{\omega_0^2 A} \{ -(\alpha + r v^2) \dot{v} + f(t) \} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、(2), (3) を代入すれば \dot{A} を A と ϕ で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\alpha}{2} A \{ 1 - \cos(2\omega_0 t + 2\phi) \} - \frac{r}{8} A^3 \{ 1 - \cos(4\omega_0 t + 4\phi) \} \\ &\quad - \frac{1}{\omega_0} f(t) \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

右辺の振動項 $A \cos(2\omega_0 t + 2\phi)$, $A^3 \cos(4\omega_0 t + 4\phi)$ は A や ϕ がゆっくり変動する量であるため 1 周期毎に相殺されてしまう、しかしランダム力 $f(t)$ はひじょうに速く変動する量であるから $\sin(\omega_0 t + \phi)$ をかけたものは周期関数ではなく、やはりランダムな関数である。そこで、

$$F(t) \equiv -\frac{1}{\omega_0} f(t) \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (7)$$

を新たなランダム力とすれば、

$$\dot{A} \simeq -\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{r}{4} A^2 \right) A + F(t) \quad (8)$$

となる。

時刻 t に確率変数 A が値 A をとる確率を $P(A, t)$ とすれば、(8) の Langevin 方程式から $P(A, t)$ に関する Fokker-Planck の方程式が次のように導かれる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{r}{4} A^2 \right) A P + D \frac{\partial^2 P}{\partial A^2} \right] \quad (9)$$

ここで拡散係数 D は

$$\langle F(t) F(t') \rangle \equiv 2 D \delta(t - t') \quad (10)$$

で与えられる。(9) の定常解は簡単に求まって

$$P(A) = P_0 \exp \left[-\frac{\alpha}{4D} A^2 - \frac{r}{32D} A^4 \right] \quad (11)$$

となる。P₀ は規格化定数である。図6に、

D = 0.01, r = 0.01 とし、αを変えた場合の P(A) の図を示す。A の最確値 A₀ は、α > 0 の場合 A₀ = 0, α < 0 では A₀ = (-4α/r)^{1/2} で与えられる。(16) の確率分布

を用いて、振幅の2次モーメント <A²> を求めると図7が得られる。大きな |α| に対する漸近形は

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle &\simeq 2D/\alpha & \alpha > 0 \\ \langle A^2 \rangle &\simeq 4|\alpha|/r & \alpha < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。一方最確値 A₀ のまわりのゆらぎの分散 <(A - A₀)²> を数値的に求めると図8に示すようになり、α = 0 で臨界点ゆらぎが現われる。A は振動数 ω₀ の波

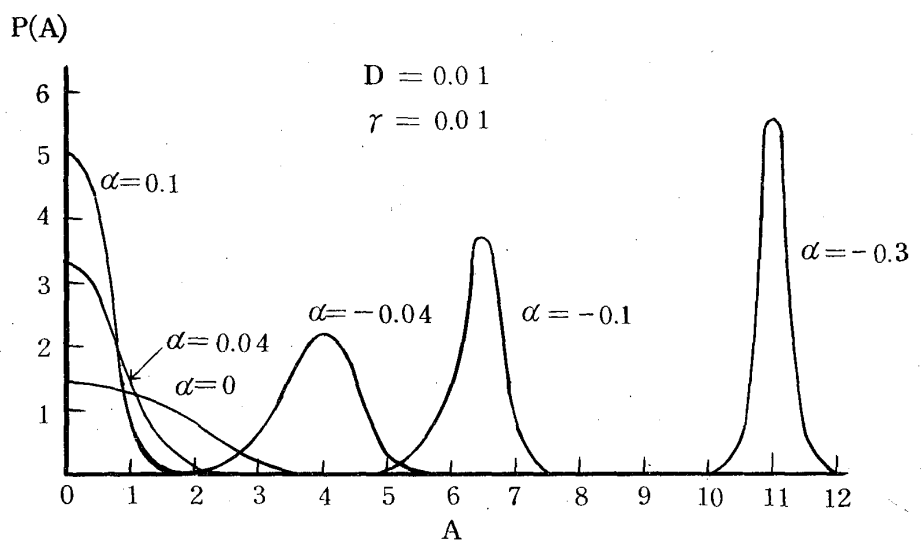


図6 振幅の確率分布

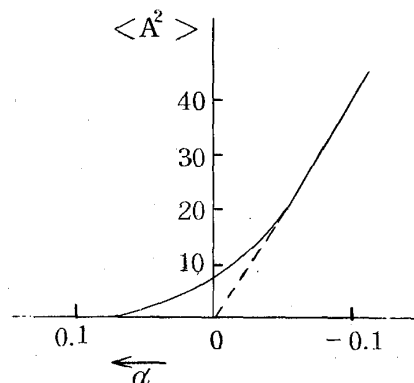


図7 振幅の2次モーメント

の振巾であるから、そのゆらぎが大きくなるということは、元の電圧 v のゆらぎとしてみると ω_0 以外の周波数成分も増加するということであって、図1に示したトンネルダイオードの臨界雑音はこれに対応するものである。

一方位相についての方程式は (2) と (3) から

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\dot{v}}{\omega_0 v} - \omega_0 t \quad (13)$$

従って

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\ddot{v} v - \dot{v}^2}{\{v^2 + (\frac{\dot{v}}{\omega_0})^2\} \omega_0} - \omega_0 t \\ &= -\frac{v}{\omega_0 A^2} \{ -(\alpha + r v^2) \dot{v} + f(t) \} \end{aligned}$$

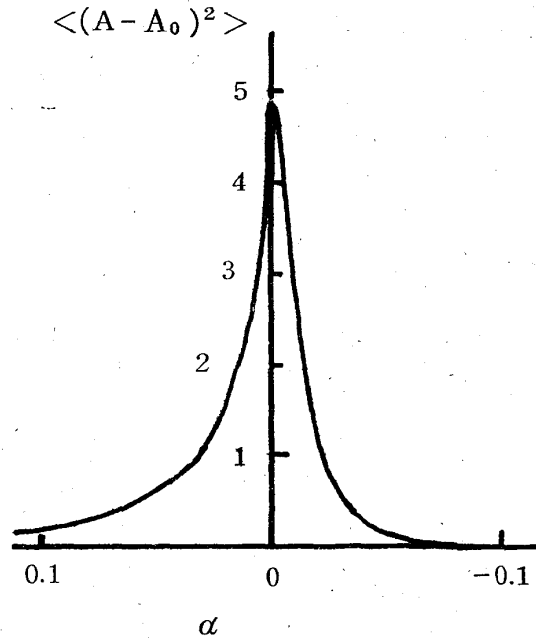


図8 最確値のまわりのゆらぎの分散

となり、再び (2), (3) を使って $v, \dot{v}, v^3 \dot{v}$ を A, ϕ で表わし、前と同じようにランダム以外の振動項を落とすと、

$$\dot{\phi} \simeq \frac{1}{A} F_2(t) \quad (14)$$

と近似される。

$$\text{ただし } F_2(t) = -\frac{1}{\omega_0} f(t) \cos(\omega_0 t + \phi)$$

である。 ϕ に対する見かけ上のランダム力 $F_2(t)/A(t)$ で $A(t)$ は $F_2(t)$ にくらべてゆっくり変動する量であるので $\langle (F_2/A)^2 \rangle \simeq \langle F^2 \rangle / \langle A^2 \rangle$ で近似して、位相の確率分布に関する拡散方程式を

$$\frac{\partial P(\phi, t)}{\partial t} = \frac{D}{\langle A^2 \rangle} \frac{\partial^2 P(\phi, t)}{\partial \phi^2} \quad (15)$$

とおく、実際は $A(t)$ が 0 を通過すれば、拡散係数は ∞ になってそのたびに位相の記

憶は失われ、上の近似はなりたたないのであるが、少くとも発振領域では $A(t)$ が 0 になることは殆んどないであろう。(15) を認めればこれはいわゆる random walk であって、その解は

$$P(\phi, t | \phi_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t / \langle A^2 \rangle}} \exp \left[-\frac{\langle A^2 \rangle |\phi - \phi_0|^2}{4 D t} \right] \quad (16)$$

となり、分散は

$$\langle (\phi - \phi_0)^2 \rangle = \frac{2 D}{\langle A^2 \rangle} t \quad (17)$$

と時間に比例して広がるが、その広がる速さは $\langle A^2 \rangle$ に逆比例する。かくして、 α が臨界点を通過して負になったときコヒーレントな発振が実現するのは、位相の確率分布に対する拡散係数が $\langle A^2 \rangle$ の増加に伴って小さくなるからであると考えてよい。

§4 おわりに

エネルギーを定常的にとりこみながら、それを他の自由度へ逃がすことによって、一つの散逸的な構造を形成する性質は、一言でいうと“能動性”ということであるが、これは要するに負性抵抗性でもある。自然界のいたるところに見られる能動性の現象のなかで、電気回路の発振現象は人工的に制御できるもっとも簡単なひな型の一つであり、負性抵抗ということが比較的素直に受け入れられる例である。ここではわれわれは van der Pol 方程式という簡単なモデルによって、 α を負にすることで能動性を表わし現象論的にゆらぎがどのような法則に従っているかを調べた。

非平衡系の統計物理学の問題としては勿論いろいろな段階の問題があり、発振回路においても、直流の形でとり入れたエネルギーが無数個の自由度のなかの ω_0 という周波数へ集束していくことによって、結果的に $\alpha < 0$ に相当することが起っていることを導くことができるならば、これは一步踏み込んだ見方である。例えば発振の臨界点の近傍でスペクトルを観測すると、 ω_0 への引き込みが見られるが、この場合モード結合のような考え方が実際に必要になる。

発振に限らず、今後いろいろな能動的現象についての定量的な実験が期待される。その際平均値の測定だけでなく、平均値のまわりのゆらぎの測定も重要である。非平衡系

のゆらぎについて、われわれは平衡系におけるゆらぎのような確固とした知識は何ももち合わせていないが、前者においてもゆらぎがその状態の安定度の目安になることは確かであろう。

参 考 文 献

- 1) V. Degiorgio and M. O. Scully : Phys. Rev. A2 (1970) 1170
- 2) R. Graham and H. Haken : Z. Phys. 237 (1970) 31
- 3) E. Pytte and H. Thomas : Phys. Rev. 179 (1969) 431
- 4) J. W. F. Woo and R. Landauer : IEEE J. Quantum Electron QE-7 (1971) 435
- 5) F. T. Arecchi : Quantum Optics, ed. R. J. Glauber (Academic, New York, 1969) p. 57
- 6) 松原武生 : 物性研究 16 (1971) B50
- 7) C. Freed and H. A. Haus : Phys. Rev. 141 (1966) 287
- 8) J. A. Armstrong and A. W. Smith : Phys. Rev. 140 (1965) A155
- 9) K. Matsuno : Phys. Letters 31A (1970) 335
- 10) T. Kawakubo, S. Kabashima and K. Nishimura : J. Phys. Soc. Japan 34 (1973) 1460
- 11) T. Kawakubo, S. Kabashima and M. Ogishima : J. Phys. Soc. Japan 34 (1973) 1149
- 12) N. G. van Kampen : Fluctuation Phenomena in Solids, ed. R. E. Burgess (Academic Press, 1965)
- 13) R. Kubo : Proc. Symposium on Synergetics, ed. H. Haken (B. G. Teubner 1972) p. 28
- 14) R. Kubo, K. Kitahara and K. Matsuo : J. Stat. Phys. 9 (1973) 51
- 15) R. L. Stratonovich : Topics in the Theory of Random Noise vol I, vol II (English Translation, Gordon and Breach 1963)