流れのある場合の核磁気共鳴

東大・理・物理　　高　木　　　伸

スピン三重項のクーパー対をもつ超流動体においては，一般に，横磁気共鳴線（振動磁場を静磁場に垂直にかけるときの共鳴線）の位置がラーマー周波数から移動し，縦磁気共鳴（振動磁場を静磁場に平行にかけるときの共鳴）も有限の周波数で起きると考えられる。横（縦）磁気共鳴線の位置を ω_t（ω_ℓ）と書き，ラーマー周波数を ω_L と書くと，レゲットの方程式[1]から次の和則が得られる。

$$(\omega_t^2-\omega_L^2)+\omega_\ell^2 = \Omega_{xx}^2+\Omega_{yy}^2+\Omega_{xx}^2$$
$$= -6\frac{\gamma^2}{\chi}\langle\mathcal{H}_d\rangle\ , \qquad (1)$$

ここで

$$\Omega_{ij}^2 = -\frac{\gamma^2}{\chi}\ \langle[S_i[S_j\mathcal{H}_d]]\rangle,$$

χ　：スピン帯磁率

γ　：磁気回転比

$\vec{S}$　：系の全スピン

$\mathcal{H}_d$　：磁気双極子・双極子相互作用

である。特に $\omega_L^2\gg\Omega_{ij}^2$ のときには，

$$\begin{aligned}\omega_t^2-\omega_L^2 &= \Omega_{xx}^2+\Omega_{yy}^2\\ \omega_\ell^2 &= \Omega_{zz}^2\end{aligned} \qquad (2)$$

（静磁場 $\vec{H}$ は $\hat{Z}$ 方向にかけるものとする）となる。一般的に $\omega_t^2-\omega_L^2$ と ω_ℓ^2 とを別々に求めるには，３次方程式を解かねばならない。（$\omega_L\equiv\gamma H=0$ ならば，「Z方向」に特別の意味がないので，適当な座標系を選んで Ω_{ij}^2 を対角化すればよい。）

Ω^2_{ii} は，i 軸の回りにスピンをよじったときの双極子・双極子相互作用エネルギー（以下，「DE」と略称）の変化に関係づけられる量で，常に $\Omega^2_{zz} \geq 0$ である。また $\omega_L \to 0$ の極限では，$\Omega^2_{xx} \geq 0$，$\Omega^2_{yy} \geq 0$ である。これは，平衡状態が，DEを最低にする状態になっているためである。ところが，ω_L が充分大きいときには，平衡状態で必ずしもDEが最低になっているとは限らない。もちろん，全自由エネルギーFは最低になっている。したがって，スピンをよじったとき，Fは増大するがDEは減少することがある。故に，Ω^2_{xx}，$\Omega^2_{yy} < 0$ になり得る。

このような現象の起こる一つの例として，超流体の流れがある場合の核磁気共鳴を考えよう。充分大きな系を考え，境界（容器の壁など）の影響は無視できるものとすると，系の平衡状態は次のように決まるであろう。まず，スピン空間および軌道空間の回転に対して不変な自由エネルギーを F_0 とする。秩序パラメータ $\vec{\Delta}(\hat{k})$ は F_0 を最低にするように決めるが，スピンと軌道の配向は F_0 だけでは決まらず，回転対称性を破る項が必要になる。そのために，磁場，流れ，およびDEを考え，これらを摂動で扱うと，

$$F - F_0 = -\frac{1}{2}\vec{H}\overset{\leftrightarrow}{\chi}\vec{H} + \frac{1}{2}\vec{v}\overset{\leftrightarrow}{\rho_s}\vec{v} + \langle \mathcal{H}_d \rangle, \tag{3}$$

となる。ただし

$\overset{\leftrightarrow}{\chi}$ ： 秩序パラメータのスピン量子化軸を固定したときの，スピン帯磁率テンソル

$\overset{\leftrightarrow}{\rho_s}$ ： 秩序パラメータの軌道量子化軸を固定したときの，超流体密度テンソル

である。話を T_c 近傍に限り，秩序パラメータで展開すると

$$\begin{aligned} \chi_{ij}/\chi_n &= \delta_{ij} - \frac{1}{1+Z_0/4}\,\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}\langle \Delta_i(\hat{k})\Delta_j(\hat{k})^* + \text{c.c.}\rangle, \\ \rho_{sij}/\rho &= \frac{1}{1+F_1/3}\,\frac{21\zeta(3)}{4\pi^2 T_c^2}\langle \hat{k}_i\hat{k}_j\,|\vec{\Delta}(\hat{k})|^2\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

ただし χ_n は正常相でのスピン帯磁率，Z_0 および F_1 はランダウのフェルミ液体パラメータである。また今後＜……＞はフェルミ面上での角度平均の意味に用いる。したがって，

$$\begin{aligned} F - F_0 = N(0)\{ & M\langle |\hat{h}\cdot\vec{\Delta}(\hat{k})|^2\rangle + C\langle (\hat{v}\cdot\hat{k})^2\,|\vec{\Delta}(\hat{k})|^2\rangle \\ & + D\langle |\hat{k}\cdot\vec{\Delta}(\hat{k})|^2 - \frac{1}{3}|\vec{\Delta}(\hat{k})|^2\rangle\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\hat{h} = \vec{H}/H, \quad \hat{v} = \vec{v}/v,$$

$$M = \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{1}{(1+Z_0/4)^2} \left(\frac{\hbar\omega_L}{T_c}\right)^2,$$

$$C = \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{1}{(1+F_1/3)^2} \left(\frac{p_F v}{T_c}\right)^2,$$

$$D = 3\pi R^2 \frac{g_d}{g^2}, \qquad g_d \equiv \gamma^2\hbar^2 N(0)/V.$$

ここで，$N(0)$ はフェルミ面での片方のスピンの状態密度，p_F はフェルミ運動量，g は無次元のBCS結合定数，Vは体積，R^2 は $\langle \mathscr{H}_d \rangle$ の計算で現われるくり込み定数[2)]である。（Dのより精確な評価は核磁気共鳴線の移動の大きさと(1)を組合わせて得られる。）式(5)を導くにあたり，$\vec{\Delta}(\hat{k})$ の $\hat{k}$ 依存性が（T_cの近傍では）一種類の部分波で表わせると仮定した。また，等方的な部分はすべて F_0 に吸収させた（以下同様）。

スピン三種類のクーパー対のうちで最も簡単な，「一次元的な対」を考えよう。すなわち，次のような構造を仮定する。

$$\vec{\Delta}(\hat{k}) = \hat{d}\, f(\hat{k})\, \Delta(T) \tag{6}$$

ここで，$\hat{d}$ はクーパー対のスピン量子化軸を規定する単位ベクトル，$f(\hat{k})$ は

$$\langle |f(\hat{k})|^2 \rangle = 1$$

によって規格化された軌道波動函数である。（一般の三重項クーパー対の構造は「三次元的」であり，互いに直交する単位ベクトル $\hat{d}_1$，$\hat{d}_2$，$\hat{d}_3$ を用いて

$$\vec{\Delta}(\hat{k}) = \sum_{i=1}^{3} \hat{d}_i\, f_i(\hat{k};T) \tag{7}$$

の形に書ける。(6)は，(7)において $f_1 = f_2 = 0$ の場合を考え，かつ，$f_1(\hat{k};T) = f(\hat{k})\,\Delta(T)$ という簡単化（つまり，波動函数の $\hat{k}$ 依存性が温度とともに連続的に変化することはないという仮定）をしたものである。）更に，$f(\hat{k})$ はある単位ベクトル $\hat{\ell}$ の回りに軸対称性をもっていると仮定しよう。「$\hat{\ell}$ の回りで軸対称である」とは，$\hat{\ell}$ をz'軸とする座標系 $x'y'z'$ において次の関係がみたされていることである，と定義する。

$$<\hat{k}_i'\hat{k}_j' \mid f(\hat{k}') \mid^2> = \delta_{ij}(a - \delta_{iz} b), \tag{8}$$

$$a>0, \quad b>0, \quad 3a-b=1.$$

（P波の場合にアンダーソンとブリンクマン[3]によって提案された波動函数 $f(\hat{k}') = \sqrt{\frac{3}{2}}(\hat{k}_x' + i\hat{k}_y')$ はこの定義に当てはまり，$a = 2/5$，$b = 1/5$ となる。）座標系 $x'y'z'$ において $\overleftrightarrow{\rho}_s$ は対角形になり，二つの異なる固有値をもつ。その比が $a : a-b$ で与えられる。このようなクーパー対は，それぞれスピンと軌道を特徴づけるベクトル $\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ によって記述されることになる。明らかに

$$<|\hat{h}\cdot\vec{\Delta}(k)|^2> = (\hat{h}\cdot\hat{d})^2\,\Delta(T)^2$$

である。また，座標系 $x'y'z'$ と空間に固定した（つまり，$\vec{H} \parallel \hat{z}$ となるような）座標系 xyz とをつなぐ回転行列を R とすれば，

$$<(\hat{v}\cdot\hat{k})^2|\vec{\Delta}(\hat{k})|^2> = <(\hat{v}\cdot\hat{k})^2|f(\hat{k})|^2>\Delta(T)^2$$

$$= <(\hat{k}'\cdot R\hat{v})^2|f(\hat{k}')|^2>\Delta(T)^2$$

$$= \{a - b(R\hat{v})_z^2\}\,\Delta(T)^2$$

ところが定義により $R_{zi} = \hat{\ell}_i$ であるから

$$(R\hat{v})_z = \sum_i R_{zi}\hat{v}_i = \hat{\ell}\cdot\hat{v}$$

$$\therefore\ <(\hat{v}\cdot\hat{k})^2|\vec{\Delta}(\hat{k})|^2> = \{a - b(\hat{\ell}\cdot\hat{v})^2\}\,\Delta(T)^2$$

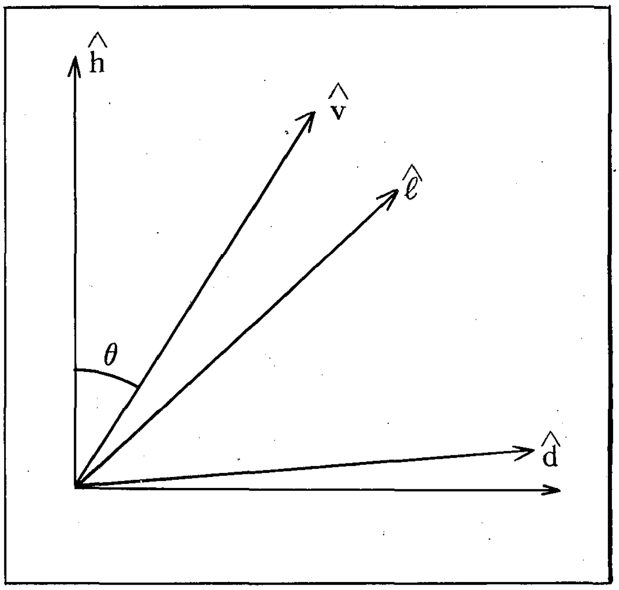
同様に

$$<|\hat{k}\cdot\vec{\Delta}(k)|^2> = \{a - b(\hat{d}\cdot\hat{\ell})^2\}\,\Delta(T)^2$$

したがって

$$F - F_0 = N(0)\,\Delta(T)^2\{M(\hat{h}\cdot\hat{d})^2 - Cb(\hat{\ell}\cdot\hat{v})^2 - Db(\hat{d}\cdot\hat{\ell})^2\} \tag{9}$$

が得られる。$\hat{h}$ と $\hat{v}$ の間の角度を θ（$0<\theta<\pi/2$）とおこう。$\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ の，Fを最低にする配向は，三つのパラメータ $\xi\equiv C/M$, $\eta\equiv Db/M$, の函数として定まる。$\hat{d}$と$\hat{\ell}$ が $\hat{h}$ と $\hat{v}$を含む平面内にくること，そして四個のベクトル $\hat{h}, \hat{v}, \hat{\ell}, \hat{d}$ の順に並ぶことは明らかであろう（図１）。特にM＝０なら $\hat{d}\,/\!/\,\hat{\ell}\,/\!/\,\hat{v}$，またC＝0 なら $\hat{h}\perp\hat{d}\,/\!/\,\hat{\ell}$ となり，いずれの場合にもDEは最小値をとる。$M\neq 0$, $C\neq 0$ のときには，Fが最低の状態は必ずしも D' を最小にしないことが分かる。



（図１）

磁気共鳴について調べるために Ω_{ij}^2 を計算しよう。特性周波数

$$\Omega_0^2=12\pi R^2(1+Z_0/4)\, g_d<|\Delta(k)|^2>$$

を単位として無次元化すると，

$$\begin{aligned} C_{ij} &\equiv \Omega_{ij}^2/\Omega_0^2 \\ &= R_e<\hat{k}\times\vec{\Delta}(\hat{k}))_i(\hat{k}\times\vec{\Delta}(\hat{k})^*)_j \\ &\quad+\frac{1}{2}(\hat{k}\cdot\vec{\Delta}(\hat{k})(\hat{k}_i\Delta_j(k)^*+\hat{k}_j\Delta(\hat{k})^*) \\ &\quad-\delta_{ij}|\hat{k}\cdot\vec{\Delta}(\hat{k})|^2>/<|\vec{\Delta}(\hat{k})|^2> \end{aligned} \tag{10}$$

の形になる。(6), (8) で与えられるクーパー対の場合には，上述の計算と同様にして $\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ のみで表現する。

$$\begin{aligned} C_{ij} = b\{\delta_{ij}(\hat{d}\cdot\hat{\ell})^2-\frac{1}{2}(\hat{d}\cdot\hat{\ell})(\hat{\ell}_i\hat{d}_j+\hat{\ell}_j\hat{d}_i) \\ -(\hat{\ell}\times\hat{d})_i(\hat{\ell}\times\hat{d})_j\} \end{aligned} \tag{11}$$

以下，三つの極限的な場合について調べよう。（$\hat{v}$ を zy 平面内にとる。）

ⅰ）$M\gg C, D$ のとき，

$\hat{d} \perp \hat{h}$，すなわち $d /\!/ y$，としてよい。

$$C_{xx} = \frac{\eta - \xi\cos 2\theta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos 2\theta}}\ b,$$

$$C_{zz} = \frac{1}{2}(b + C_{xx}),$$

$$C_{yz} = -\frac{1}{4}\frac{\xi\sin 2\theta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos 2\theta}}\ b,$$

他の $C_{ij} = 0$，

ii) $D \gg C, M$ のとき，
$\hat{d} /\!/ \hat{\ell}$ としてよい。

$$C_{yy} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\xi\cos 2\theta - 1}{\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi\cos 2\theta}}\right\} b,$$

$$C_{zz} = b - C_{yy},$$

$$C_{yz} = -\frac{1}{2}\frac{\xi\sin 2\theta}{\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi\cos 2\theta}}\ b,$$

他の $C_{ij} = 0$,

iii) $C \gg M, D$ のとき，
$\hat{\ell} /\!/ \hat{v}$ としてよい。

$$C_{xx} = \frac{\eta - \cos 2\theta}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta\cos 2\theta}}\ b$$

$$C_{yy} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\eta - 1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta\cos 2\theta}}\right\} b$$

$$C_{zz} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\eta + 1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta\cos 2\theta}}\right\} b$$

$$C_{yz} = -\frac{1}{4}\left\{1 + \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2-2\eta\cos 2\theta}}\right\} b$$

他の $C_{ij} = 0$.

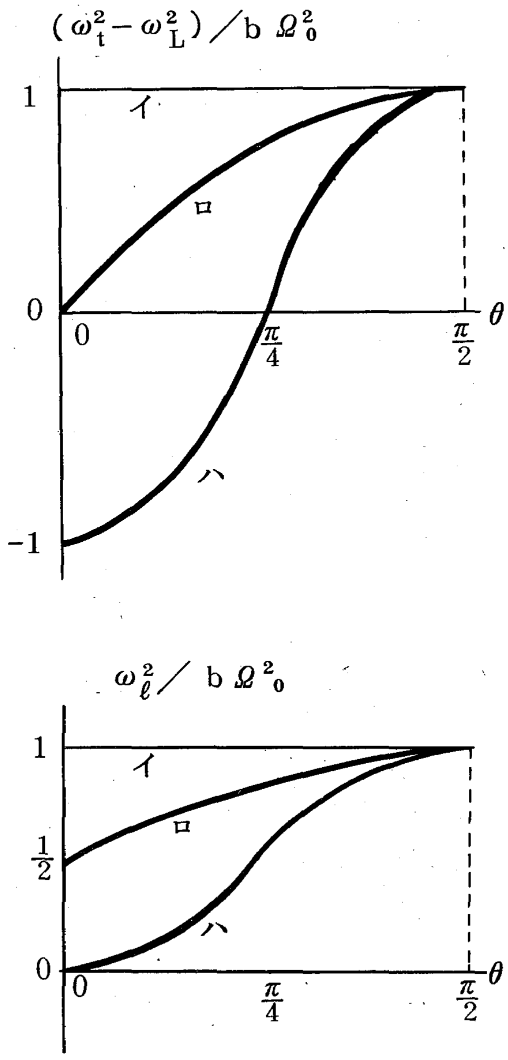
特に ⅰ) のとき，M ≫ D だから $\omega_L^2 \gg \Omega_{ij}^2$ が成り立ち，(2) が使える。特徴的な場合について図示する（図２）。つまり，M , C ≫ D のとき，$0 < \theta < \pi/4$ で横磁気共鳴線は負の方向にずれる。

液体 ^3H_e の A 相での核磁気共鳴の実験[4] によると，流れがないときには，

$$\omega_t^2 - \omega_L^2 = \omega_\ell^2$$

となる。これは図２のイと一致するから，A 相ではここで考えた型のクーパー対が出きていると考えられる。C＝D となる流速を見積もると v ～ 0.1 cm／cos となるが，これはグレイターク等[5] の評価した臨界速度 v_e と同程度である。$v > v_c$ とすることは不可能だから，実際に A 相で負のずれが観測されるかどうかは疑問である。しかし，流速が増すにつれて図２のイからロへ次第に移行する様は見られるかも知れない。

同様の現象は，流れに限らず，クーパー対の軌道部分に作用する機構があれば生ずる。たとえば，系を狭い容器に閉じ込めるときには，容器の壁がこの役割を担う。上で考えた型のクーパー対の場合には，$\hat{\ell}$ は壁の所で壁に垂直に配向すると期待される。もちろん，壁から離れた所での $\hat{\ell}$ の空間変化をも考えねばならない。



イ. D≫C，ロ. D＝C，ハ. D≪C

（図２）

文　献

1) A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **31** (1973), 352.
2) A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **29** (1972), 1227.
3) P. W. Anderson, W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1108.
4) D. D. Osheroff, W. F. Brinkman, preprint.
5) T. J. Greytak, R. T. Johnson, D. N. Paulson, J. C. Wheatley, Phys. Rev. Lett. **31** (1973), 452.

液体H_e^3に於けるパラマグノンとBCS State

東大物性研　黒田義浩

液体H_e^3の極低温に於ける新しい秩序相について，未解決で残されている本質的な問題の一つに，相図を統一的に説明することがある。ここ2年足らずの間になされて来た実験的，理論的研究によって，高温相（A相）が，Anderson − Brinkman State[1]であろうことは，ほぼ確定している。他方，低温相（B相）に就いては，結論は未だ流動的である。ここでは，Anderson−Brinkmanの仕事を更に発展させて，B相が，A相と同じ部分波からなるBalian−Werthamer State[2]である可能性があることを指摘したい。

パラマグノンによる有効相互作用は一般的に次で与えられる。

$$\Gamma(P_{1},\alpha ; P_{2},\beta ; P_2+q,\delta ; P_1-q,\gamma)=\sum_{i,j=0}^{3}\Gamma_{ij}(q)\cdot\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}\cdot\sigma_{\beta\delta}^{(j)},$$

$$\Gamma_{ij}=-\frac{1}{2}I\cdot\delta_{ij}+I\cdot\chi_{ik}^{(0)}(q)\cdot\Gamma_{kj}(q),$$

ここで，Iは，H_e^3原子間相互作用のS − wave 部分で，接触型を仮定した。又，$\sigma^{(0)}\equiv i\mathbb{1}$（$\mathbb{1}$：unitmatrix），$\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(3)}$は夫々，Pauli's spin matricesである。$\chi_{ik}^{(0)}(9)$は，bare spin susceptibilityで