線型非マルコフ Brown 運動と Master 方程式

京大・工　数理工学科
応用力学研究室　宗　像　豊　哲

（3月29日受理）

§1. 序　論

Brown運動の現象論[1]はBrown粒子の運動量P(t)に対するLangevin equation（L・Eq.）を基礎とし，Brown粒子に作用するrandom force f(t)は通常Gaussianでかつwhite noiseであると仮定される。この仮定のもとにMaster equation（M.Eq）として二階の微分方程式であるFokker－Planck(F－P Eq.)が導かれる。このclassicalなstochastic modelの精密化あるいは一般化として次の三点が考えられる。

a)　random force f(t)はnon－Gaussianである。

b)　f(t)の相関時間はfiniteである。（non－white）。

c)　L.Eq.はP(t)に関して非線型である。

この小論ではLangevin modelをb)の方向に沿って一般化した線型非マルコフBrown運動を考察する。このmodelの揺動散逸定理との関係はすでにKubo[2]により論じられているが，我々はb)の一般化にともないM.Eq.がF－P Eq.からどのように変形されるかを調べる。この為にMori et al.[3]によるM.Eq.のexactなδ－展開公式と線型非マルコフBrown運動に対するsemidynamicalなstochastic modelを用いた。質量比δ（$\equiv m/M$，m，Mは熱浴粒子及びBrown粒子の質量）の巾展開の形で我我は$t \gg \tau_c$の所でなりたつマルコフな無限階のM.Eq.を導いた。ここにτ_cはb)で述べたrandom forceの相関時間である。このLong time Markoffian M.Eq.はrecurrent formで求まりMori et al.[3]により導出されたマルコフなM.Eq.と異なった構造を持っており，又$\delta \to 0$，$\tau_c \to 0$，$\delta/\tau_c = \zeta$；const.のもとでF－P Eq.に帰着する。

§2で線型非マルコフBrown運動のstochastic modelを定め，§3でLong time

M. Eq. を導出する。§4 において運動量時間相関々数を Long time M. Eq及び L. Eq. から求め一致することを示す。§5 において exact な非マルコフ M.Eq. のマルコフ化について若干のコメントを行う。

§2. 線型非マルコフ Brown 運動

簡単の為一次元自由ブラウン運動を考える。現象論における Langevin 方程式及び F−P Eq. に対応する microscopic な方程式は非線型揺動の一般論[4]及び M. Eq. の δ 展開公式[3]を用いて次の様に与えられる。

Microscopic Langevin Eq.[4]

$$\frac{d}{dt}p(t)=\int_0^t \zeta(p(t-s),\ s)\,ds+f(t) \tag{2·1}$$

ここに

$$\zeta(p,s)=1/f_0(p)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left[f_0(p)<f(s)f(0):p>\right] \tag{2·2}$$

$$f(t)=U(t)(1-\mathscr{P})iLp(0)\equiv U(t)f(0) \tag{2·3}$$

$$U(t)=\exp\left[i(1-\mathscr{P})Lt\right] \tag{2·4}$$

$f_0(p)$ は Maxwell 分布 $(=\sqrt{\beta/2\pi M}\,\exp(-\beta p^2/2M))$, $\beta=(kT)^{-1}$。L はの Liouville 作用素であり, $\mathscr{P}$ は次で定義される projection 作用素である。

$$\mathscr{P}G(x)\equiv\int G(x')\,\delta(p'-p)\,\rho^{eq.}(x')\,dx'/f_0(p)\equiv<G;p> \tag{2·5}$$

ここに $\rho^{eq.}$ はカノニカル分布である。$<iLp;p>=0$ より $f(0)=iLp(0)$, すなわち $f(0)$ は熱浴粒子の Brown 粒子に及ぼす力である。

Microscopic Master Eq.[3]

$$\frac{\partial}{\partial t}f(p,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n+1}f_0(p)\int ds<f(0)S_{n+1}(s);\ p>\frac{\partial}{\partial p}\left(f(p,t-s)/f_0(p)\right)$$
$$\equiv\sum_{n=0}^{\infty}D_n f(p,t) \tag{2·6}$$

ここに

$$S_{n+1}(t)=\int_0^t dt_1\cdots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\, U(t-t_1)\mathscr{P}'f(0)\cdots U(t_{n-1}-t_n)\mathscr{P}'f(0)U(t_n)\mathscr{P}'f(0) \tag{2・7}$$

であり，$\mathscr{P}'\equiv 1-\mathscr{P}$ である。

線型非マルコフな Brown 運動を（2・1）の右辺にあらわれる $f(t)$ に関して次の仮定を置く事により定義する。

1）線型性　$f(t)$ は p に独立である。故に

$$f(t)\equiv \exp i(1-\mathscr{P})Lt\cdot f(0)=\exp iL_0t\cdot f(0) \tag{2・8}$$

ここに L_0 は Brwn 粒子を fix した時の Liouville 作用素である。$f(t)$ は p を含まないから（2・1）と（2・2）より L. Eq.（2・1）は p について線型であり，又 $\langle f(t);p\rangle=\langle f(t)\rangle=0$，但し $\langle G\rangle\equiv\int G\rho^{eq}dx$.

2）非マルコフ性　$f(t)$ は系が初期にカノニカル分布を時つとき Gaussian であり，

$$\langle f(t)\,f(0)\rangle=\langle f^2\rangle\exp(-t/\tau_c) \tag{2・9}$$

$$\langle f^2\rangle=mkT/(\tau_c)^2 \tag{2・10}$$

m は熱浴粒子の質量である。一般に質量 m の粒子からなる多粒子系においては

$$\langle f^2\rangle=mkT\langle\omega^2\rangle_{av} \tag{2・11}$$

ここに $\langle\omega^2\rangle_{av}\equiv\int_0^\infty f(\omega)\,\omega^2 d\omega$ であり，$f(\omega)$ は frequency spectrum

$$f(\omega)\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega t\cdot\langle p^2\rangle^{1}\langle p(t)\,p(0)\rangle\,dt \tag{2・12}$$

である。[5] Brown 粒子と熱浴粒子の間の相互作用と熱浴粒子間の相互作用を等しいと考え，かつ Brown 粒子を含む系の microscopic な characteristic time τ_c として $1/\sqrt{\langle\omega^2\rangle_{av}}$ をとると[5)6)] 仮定 2）が導かれる。線型非マルコフ Brown 運動に対するこの "stochastic" model に対しては以下で示すように（2・6）式から長時間のところでなりたつマルコフな M. Eq. を質量比 $\delta\,(=m/M)$ の巾展開として closed form で求めることが出来る。

§3. Long Time Master Equation

M.Eq.(2・6)の右辺の long time behavior ($t \gtrsim t_r \equiv \tau_c/\delta$) を §2で指定したモデルについて調べる。 $t_r = \tau_c/\delta$ は Brown粒子の運動量 $\mathbf{p}$ の relaxation time であり以下でみるように $t \gtrsim 0(\tau_c/\delta)$ の場合にのみマルコフ的記述が可能になる。時間領域のこの制限のもとに(2・6)の積分の上限を t から∞に変えると, e^{-t/τ_c} $e^{-\frac{1}{\delta}}$ のオーダーの誤差が生じるが $\delta\to 0$ の時の誤差は δ の任意の巾 δ^m より小さい。 $kT=1$, $\mathbf{v}\equiv \gamma\mathbf{p}$, $\gamma\equiv\sqrt{\mathbf{M}}$ とする。(2・6) において $f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s})$ を $f(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ で置き替えると, $n=0$ より

$$D_0^{(1)} f(v,t) = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial v} f_0(v) \int_0^\infty \langle f(0) f(s)\rangle ds \frac{\partial}{\partial v} \left(f(v,t)/f_0(v)\right)$$

$$= \frac{\delta}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial v}\left[vf + \frac{\partial}{\partial v} f\right] \qquad (3\cdot 1)$$

ここに D_0 につけた suffix (1) は (3・4) の展開の第一項から生じることを示しており, $f_0(v) = 1/\sqrt{2\pi}\exp(-v^2/2)$. $f(t)$ は $\mathbf{p}$ に独立であるから $\langle \mathbf{f}(t)\mathbf{f}(0);\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{f}(t)(0)\rangle$, 又 $\mathscr{P}' = 1-\mathscr{P} = 1-\mathscr{P}$ は $\mathbf{p}$ に独立な力学量Gに作用する時

$$\mathscr{P}'G = (1-\mathscr{P})G = G - \langle G\rangle \qquad (3\cdot 2)$$

となる。 $\mathbf{f}(t)$ は Gaussian で $\langle \mathbf{f}(t)\rangle = 0$ だから n が奇数の $D_n f(\mathbf{v}_1 \mathbf{t})$ は常に零になる。 $n=2$ から $f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s}) \to f(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ により

$$D_2^{(1)} f(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = \delta^2/\tau_c \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f_0(v) \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{ f(v,t)/f_0(v)\right\} \qquad (3\cdot 3)$$

一方 $f(\mathbf{v}, \mathbf{t}-\mathbf{s})$ を $\mathbf{t}$ のまわりで Taylor 展開して

$$f(v,t-s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(v,t) \qquad (3\cdot 4)$$

これを(2・6)に代入すると $D_0^{(1)}$ に対する $0(\delta^2)$ の補正が(3・4)の第2項と D_0 (2・6)で定義されている)から生じる。

$$D_0^{(2)} f(v,t) = -\frac{1}{\gamma^4}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f_0(v) \int_0^\infty \langle f(0) f(s)\rangle s\, ds \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f_0 \times$$

$$\int_0^\infty \langle f(0) f(s)\rangle ds \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{ f/f_0\right\}$$

$$= -\frac{\delta^2}{\tau_c}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f_0 \left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f_0 \frac{\partial}{\partial v} \{ f / f_0 \} \qquad (3\cdot5)$$

ここで(3・4)の第2項の $\partial f / \partial t$ を(3・1)を用いて表わした。$D_0^{(2)}$ は τ_c の間の f (v, t) の変化を考慮に入れた時にあらわれ $D_2^{(1)}$ と $D_0^{(2)}$ で F－P Eq.(3・1) に対する $O(\delta^2)$ の補正を与える。この補正は Lebowitz, Rubiw[7]と一致するが $\langle f(0)\ S_{n+1}(s)\rangle \propto \delta(s)$ と仮定した Mori et al.[3] によるマルコフ化では $D_0^{(2)}$はあらわれない。この点は §5 で議論する。

次に(2・6)の δ 展開の systematic procedure を考える。f(t)の性質 1) 2) より, D_{2n} f(v, t) は $O(\delta^{n+1})$ 及び δ のより高次の項からなることがある。$e^{-1/\delta}$ の order の補正を無視して,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1}\left[T_n^0 f + T_n^1 \frac{\partial f}{\partial f} + T_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \cdots\cdots \right] \qquad (3\cdot6)$$

ここに T_n^{ℓ} は

$$T_n^{\ell} \equiv \frac{1}{m^{n+1}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{2n+1} f_0(v) \int_0^{\infty} \langle f(0) S_{2n+1}(s)\rangle \frac{(-s)^{\ell}}{\ell !} ds \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{f_0}\right) \qquad (3\cdot7)$$

で定義される作用素である。次に $\{ L_n^m \}$ を以下で定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n L_n^1 f \qquad (3\cdot8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} L_n^2 f \qquad (3\cdot9)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial t^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+m-1} L_n^m f \qquad (3\cdot10)$$

(3, 8, 9, 10) を(3・6) に代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1}\left[T_n^0 f + T_n^1 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n L_n^1 f + T_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} L_n^2 f + \cdots\cdots \right] \qquad (3\cdot11)$$

(3・8) と(3・11) の右辺を比べて

$$L_n^1 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-i-1} T_i^{\ell} L_{n-\ell-i}^{\ell} + T_{n-1}^0 \qquad (3\cdot12)$$

又(3・8) と (3・9) から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta^{n+1}L_n^2 f=\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n L_n^1\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m L_n^1\ f \qquad (3\cdot 13)$$

δ の order で整理して

$$L_n^2=\sum_{i+j=n+1}L_i^1 L_j^1 \qquad i\geqq 1,\ j\geqq 1, \qquad (3\cdot 14)$$

この手続きより一般に

$$L_n^i=\sum_{j_1+\cdots+j_i=n+i-1}L_{j_1}^1 L_{j_2}^1\cdots L_{j_i}^1 \qquad (3\cdot 15)$$

(3・12,15)より

$$L_n^1=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{\ell=1}^{n-i-1}T_i^{\ell}\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=n-i-1}L_{j_1}^1 L_{j_2}^1\cdots\cdots L_{j_\ell}^1+T_{n-1}^0 \qquad (3\cdot 16)$$

(3・16)から明らかなように L_n^1 は $\{L_m^1,\ 1\leqq m\leqq n-1\}$ により表わされ，かくして L_n^1 はrecurrent に求まっていく。但し $L_1^1=T_0^0$。(2・8,9,10),(3・2,7) より，

$$T_n^{\ell}\propto\frac{1}{m^{n+1}}<f^2>^{n+1}(\tau_c)^{2n+1+\ell}=(\tau_c)^{\ell-1}, \qquad 但し\ kT=1.$$

故に $L_n^1\propto(1/\tau_c)$ がわかる。かくして $\tau_c\to 0$，$\delta\to 0$ $\delta/\tau_c=\xi$; const. の時，次のF－P Eq.を得る。

の

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\delta\ T_0^0\ f(v,t)=\xi\frac{\partial}{\partial v}\left[vf+\frac{\partial}{\partial v}f\right], \qquad t>0 \qquad (3\cdot 17)$$

ここに $\displaystyle \xi=\frac{1}{MkT}\int_0^{\infty}<f(t)\,f(o)>dt=\delta/\tau_c.$

§4. Momentum Autocorrelation Function

Brown 粒子の運動量時間相関々数 $\Phi(t)$ は Langevin 方程式（2・1）から，又 $t\gtrsim 0\ (t_r)$ に対してはLong time M.Eq.(3・8,16) から求まる。f(t) の性質 1) 2) より (2・1) は

$$\frac{d}{dt}p(t)=-\frac{1}{M}\frac{m}{(\tau_c)^2}\int_0^t e^{-s/\tau_c}p(t-s)\,ds+f(t) \qquad (4\cdot 1)$$

となる。§3におけるように $\beta=(kT)^{-1}=1$ とした。**f(t)** は $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)$ に直交する

から[4]， $t=0$ での $p(t)$ の値 p_0 が与えられた時の $p(t)$ の平均 $\bar{p}(t)$ は

$$\frac{d}{dt}\,\bar{p}(t) = -\frac{1}{M}\,\frac{m}{(\tau_c)^2}\int_0^t e^{-s/\tau_c}\,\bar{p}(t-s)\,ds \tag{4・2}$$

を満たす。これを解いて

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4\delta}}\left[\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}\,e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}t} - \frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}\,e^{-\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}t}\right]p_0 \tag{4・3}$$

$t \gtrsim t_r = \tau_c/\delta$ に対して

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4\delta}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}\,e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}t}\,p_0 + 0(e^{-1/\delta})$$

故に

$$\frac{d}{dt}\,\bar{p}(t) = -\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c}\,\bar{p}(t) + 0(e^{-1/\delta}) \tag{4・4}$$

$\Phi(t)$ は $\bar{p}(t)/p_0\cdot\langle p_0^2\rangle = M\,\bar{p}(t)/p_0$ で与えられる。

次に M. Eq. (3・8, 16) を用いて $t \gtrsim t_r$ での $\bar{v}(t) = \int v\,(v,t)\,dv$ を求めよう。(3・8) より

$$\frac{d}{dt}\,\bar{v}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\delta^n\int v\,L_n^1\,f(v,t)\,dv \tag{4・5}$$

ここで $e^{-1/\delta}$ の order の補正項は省略してある。§3で示したように L_n^1 は $\{T_\ell^m\}$ の積の和であらわされる。これを (4・5) に代入し v-space での積分を行うと，部分積分により $T_\ell^m\ (\ell \neq 0)$ を含む項は寄与しない事が (3・7) よりわかる。そこで作用素 M_n を $L_n^1 = L_n^1(\{T_\ell^m\})$ において $T_\ell^m\ (\ell \neq 0) = 0$ をおいて得られる作用素で定義する。(4・5), (3・12) を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\bar{v}(t) &= \int v\Big[\delta\,T_0^0 + \sum_{n=2}^{\infty}\delta^n\sum_{\ell=1}^{n-1}T_0^\ell\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=n-1}M_{j_1}\cdots M_{j_\ell}\Big]f(v,t)\,dv\\ &= \int v\Big[\delta\,T_0^0 + \sum_{n=2}^{\infty}\delta^n\,T_0^0\sum_{\ell=1}^{n-1}(-\tau_c)^\ell\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=n-1}M_{j_1}\cdots M_{j_\ell}\Big]f(v,t)\,dv\end{aligned} \tag{4・6}$$

ここで $T_0^\ell = (-\tau_c)^\ell\,T_0^0$ を用いた。母関数 $m(z)$ を

$$m(z) = \sum_{n=1}^{\infty}M_n\,z^n \tag{4・7}$$

で定義する。$M_1 = T_0^0$， $n \geqq 2$ に対して（4・6，7）より

$$M_n = T_0^0 \sum_{\ell=1}^{n-1} (-\tau_c)^{\ell} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [m(z)]^{\ell} \Big|_{z=0} \tag{4・8}$$

がなりたつ。（4・7，8）より

$$m(z) = T_0^0 z + \sum_{n=2}^{\infty} T_0^0 \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \sum_{\ell=1}^{n-1} (-\tau_c m(z))^{\ell} \right]_{z=0} z^n$$

$$= T_0^0 z (1+\tau_c m(z))^{-1} \tag{4・9}$$

故に $m(o) = 0$ を用いて

$$m(z) = (-1+\sqrt{1+4\tau_c z T_0^0}) / 2\tau_c \tag{4・10}$$

T_0^0 の adjoint 作用素 Λ_0 を $\int f T_0^0 g dv = \int g \Lambda_0 f dv$ で定義すると

$$\Lambda_0 = - 1/\tau_c \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial v^2} - v \frac{\partial}{\partial v} \right] \tag{4・11}$$

v は Λ_0 の固有ベクトルである事を用いて

$$\frac{d}{dt} \bar{v}(t) = \int v m(\delta) f(v, t) dv$$

$$= \int f(v,t) \cdot \frac{-1+\sqrt{1+4\tau_c \delta \Lambda_0}}{2\tau_c} v dv = \frac{-1+\sqrt{1-4\delta}}{2\tau_c} \bar{v}(t) \tag{4・12}$$

$\bar{p}(t) = r^{-1} \bar{v}(t)$ から，$t \gtrsim t_r$ の時

$$\frac{d}{dt} \bar{p}(t) = -(1-\sqrt{1-4\delta}) / 2\tau_c \bar{p}(t) + O(e^{-1/\delta}) \tag{4・13}$$

（4・4）と（4・13）から Long time M. Eq.（3・8，16）より求まる p(t) あるいは Φ の $t \gtrsim t_r$ での振るまいは Langevin Eq.（2・1）からえられるものと $O(e^{-\frac{1}{\delta}})$ の誤差を除いて一致することがわかる。一般に Langevin Eg.(2・1) と M. Eq.(2・6) は dynamical model を扱う場合においてのみ equivalent であるが，上に示した結果は我々の Long time M. Eq. の validity に保障を与えると考えられる。

§5. 結 び

classical な Brown 運動論を非マルコフに拡張した線型非マルコフな Brown運動に対して，Longtime Markoffian M. Eq. を導出した。この方程式は recurrent form で求まり，このことは非マルコフな exact M. Eq. からマルコフな M. Eq. を $t \gg \tau_c$ で導出する際に他にも見うけられる。[8] Mori et al [3] によるマルコフ化では (2・6) より

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial}{\partial t}^{n+1} f_0(p) \int_0^{\infty} ds < f(0)\, S_{n+1}(s)\,;\, p > \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{f(p,t)}{f_0(p)} \right\} \quad (5\cdot 1)$$

が得られる。すなわち random force の相関々数 $< \mathbf{f}(0) \mathbf{S}_{n+1}(s)\,;\, \mathbf{p} >$ は Dirac の δ 関数に比例すると仮定されている。small parameter δ は Macro 変数 A を用いて $\delta = 0\,(\dot{A})$ とあらわせるが，non-dimension な形であらわすと $\delta = \tau_c / \tau_r$ となる。ここに τ_c は random force の相関時間をあらわし系の midroscopic characferistic time の order であり τ_r は macro 変数の relaxatior time である。M.Eq の δ 展開を行う場合，τ_c は τ_r に比べて十分小さいが，finite な量であり τ_c の時間での $\mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{t})$ の変化を考慮に入れる必要が生じる。このことから $\mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{t-s})$ を $\sum_{n=0}^{\infty} (-s)^n / n!\, (\partial^n / \partial t^n)\, \mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{t})$ とあらわしこれを (2・6) に代入して右辺を δ の order で整理することが必要になった。

この小論では Brown 運動の簡単な stochastic model を考察したが，一般の場合にも同様の手続きが必要であると思われる。

以上述べた結果を導くのに random force f(t) の Gauss 性は不必要である。§3 で述べた $D_n f = 0$ for n : odd は対称性より導かれる。

参 考 文 献

1) M. C. Wang and G. E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys. **17** (1945), 323.
2) R. Kubo, in "Many-Body Theory" (W. A. Benjamin, Inc. 1966).
3) H. Mori, H. Fujisaka and H. Shigematsu, Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 109.
4) H. Mori and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 764.
5) K. S. Singwi and M. P. Tosi, Phys. Rev. **157** (1967), 153.
6) A. Rahman, J. Chem. Phys. **45** (1966), 2585.

7) J. L. Lebowitz and E. Rubin, Phys. Rev. **131** (1963), 2381.

8) **P.** Resibois ; in "Physics of Many-Particle Systems" vol. 1.