

動的ベータ近似

東大理 齋藤幸夫

Critical モードの長距離秩序・磁化の振舞と、それにひきずられて Critical な行動をする短距離秩序・エネルギーの動的な様相を見る。

簡単なモデルとして、熱浴により確率論的に時間発展をさせられているイジング・スピン系を考え、対の様子まで考慮に入れて運動を追う。¹⁾

方法としては、スピンの数、対の数が巨視変数であることに着目し、スピン系の運動がマスター方程式に従うと仮定して、久保・松尾・北原²⁾ の Ω^{-1} 展開の方法を使用する。

全スピン数 N は一定であり、上向き(+)スピンの数 N_+ を独立変数とすると、下向き(-)スピン数 N_- 、磁化 $M = N_+ - N_-$ は定まる。また全スピン対の数 Q も一定であり、+-スピン対の数 Q_{\pm} を独立変数とすると、+++スピン対の数 Q_{++} 、---対の数 Q_{--} は夫々下の関係を満たす。

$$Q = Q_{++} + Q_{\pm} + Q_{--} = \frac{Z}{2} N$$

$$Q_{++} + \frac{Q_{\pm}}{2} = \frac{Z}{2} N_+, \quad Q_{--} + \frac{Q_{\pm}}{2} = \frac{Z}{2} N_- .$$

但し、 Z は最近接スピンの数である。幾何学的には、 N_+ が上向きスピンの全体積を表わし、 Q_{\pm} は上-下スピン領域の接触面積を表わす。最近接相互作用 J だけしかなく、それに磁場 H がかかっている時のエネルギーは、

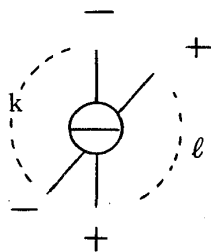
$$E = -J(Q_{++} + Q_{--} - Q_{\pm}) - g\mu_B H \cdot M$$

と書かれる。

熱浴により確率的に運動させられるが、素過程としては、一つのスピンの反転という、エネルギー・磁化非保存の運動を考える。次の図の如き配位をしている中心の一スピンの反転すると、磁化は 2 増え、 Q_{\pm} は $(\kappa - l)$ 増える。その遷移確率は、中心となるべき一スピンの数に比例し、下図の配位の出現確率と、エネルギー変化の起こる確率と

斎藤幸夫

に比例して，結局



$$W(M, Q_{\pm} \rightarrow M+2, Q_{\pm} + k - \ell) = \frac{1}{\tau} N_{\pm} z C_k \frac{Q_{\pm}^{-} C_k \quad \frac{Q_{\pm}^{+} C_{\ell}}{2}}{\frac{Z}{2} N^{-} C_z} e^{-(k-\ell)K + \mu}$$

となる。但し $K = J/R_B T$, $\mu = g \mu_B H/k T$ 。中心が上向きスピンの場合も，同様に求まる。

遷移確率が N に比例しているので，久保・松尾・北原の Ω^{-1} 展開の方法を適用できる。以下の如く変数を規格化する。

$$\begin{aligned} x_1 &= M/N & x_{1+} &= N_+/N & x_{1-} &= N_-/N \\ x_2 &= Q_{\pm}/N & x_{2+} &= Q_{++}/N & x_{2-} &= Q_{--}/N \end{aligned}$$

遷移確率のモーメント

$$C \frac{x_1^{n_1}, x_2^{n_2}}{n_1 + n_2} (x) = \frac{1}{N} \sum_{r=1, -1} (2r)^{n_1} (2S)^{n_2} W(M, Q_{\pm} \rightarrow M+2r, Q_{\pm} + 2S)$$

$$S = -\frac{Z}{2}, \dots, \frac{Z}{2}$$

を用いて，平均値，分散の運動は 夫々

$$\begin{aligned} \partial x_i / \partial t &= C_1^i (x) \\ \partial \sigma_{ij} / \partial t &= (\partial C_1^i / \partial x_k) \sigma_{kj} + \sigma_{ik} (\partial C_1^j / \partial x_k) + C_2^{ij} \end{aligned}$$

と記述される。

平衡状態ではベーテ近似が再現されて，

$$2K_C = \frac{2J}{k_B T_C} = \ell_n \frac{Z}{Z-2}$$

となる。

この平衡状態のまわりで運動を調べる。平均値の運動を、ずれ $\delta x_i = x_i - x_{i,eq}$ について線型化した範囲内で解くと、 $T > T_c$ では

$$\delta x_1(t) = \delta x_1(0) \exp(-t/\tau_s), \quad \delta x_2(t) = \delta x_2(0) \exp(-t/\tau_f)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = \left(\frac{Z}{T}\right) (\text{chK})^{-z} (e^{-2k} - e^{-2kc}) \rightarrow 0 \quad (\text{as } T \rightarrow T_c)$$

$$1/\tau_f = (4/\tau) (\text{chK})^{2-z}$$

つまり磁化、上下領域の体積差はゆっくり運動し、臨界緩和を示すが、エネルギー、境界面積は速く運動して、緩和が異常を示さない。磁化との2次の結合まで考慮すると、

$$\delta x_2(t) = \delta x_2(0) \exp(-t/\tau_f) - a \delta x_1^2(0) [\exp(-2t/\tau_s) - \exp(-t/\tau_f)]$$

となり、磁化により緩和が惹起される。

T_c 以下では両者は線型の範囲内で絡み合う。磁化にも、エネルギーにも同じ様に遅い緩和と速い緩和と両方が見られるが、臨界点に近づけると、遅いモードは磁化に、速いモードはエネルギーに近づいていく。

分散に対しても同様に線型近似をしてやると、 $T > T_c$ では

$$\delta \sigma_{11}(t) = \delta \sigma_{11}(0) e^{-2t/\tau_s} + A \delta x_2(0) [e^{-t/\tau_f} - e^{-2t/\tau_s}]$$

$$\delta \sigma_{12}(t) = \delta \sigma_{12}(0) e^{-(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_f})t} + B \delta x_1(0) [e^{-t/\tau_s} - e^{-(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_f})t}]$$

$$\delta \sigma_{22}(t) = \delta \sigma_{22}(0) e^{-2t/\tau_f} + C \delta x_2(0) [e^{-t/\tau_f} - e^{-2t/\tau_f}]$$

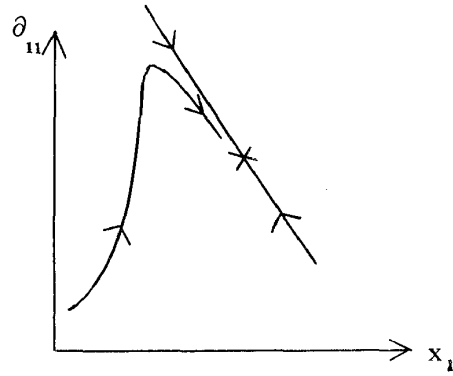
磁化の分散はそれ自身ゆっくりであり、磁化とエネルギーの Cross 相関は磁化に引かれて一番ゆっくり変化するが、エネルギー自身の分散は線型の範囲内では臨界緩和を示さない。平均値の場合と同様、非線型の効果を入れると遅い緩和が残る。

T_c 以下の温度では分散も絡み合う。臨界温度は近で、一番遅いモードに着目すると、遅いモードは磁化に、速いモードはエネルギーに近づくので、磁化の分散は大体

齋藤幸夫

$$\delta \dot{\sigma}_{11} = -(2/\tau_s^1) \delta \sigma_{11} + \alpha \delta x_1 + \beta \delta x_2 \quad (\alpha < 0)$$

となる。ゆっくり変化する $x_1 - \sigma_{11}$ 空間で考えると, $x_1 \sim 0$ の不安定点付近からは分散は平均値の2倍の速さで大きくなり, 真の平衡点へ引かれるが, 吸い込み口が上を向いている(下図)ので, 分散には極大が表われる。



参 考 文 献

- 1) R. Kikuchi Ann. Phys (N. Y) 10 ('60) 127
- 2) R. Kubo, K. Matsuo, K. Kitahara J. Stat. Phys. 9 ('73) 51