自発磁化を伴わない帯磁率発散

— 有限 Bethe 格子上の Ising 模型の厳密な性質 —

九大理　　松　田　博　嗣

2次元Heisenberg 模型において，Mermin と Wagner は有限温度で自発磁化が存在しないことを証明した。一方 Stanley と Kaplan は高温展開よりの外挿により有限温度領域における帯磁率発散の可能性を示唆したが，その適否についてはまだ明らかではない。ここでは，有限 Bethe 格子上の Ising 模型の場合，このようなことが実際に起ることを示す。

系の Hamiltonian を

$$\mathcal{H} = -J\Big(\sum_{i_1=1}^{z} \sigma_0 \sigma_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{z} \sum_{i_2=1}^{z-1} \sigma_{i_1} \sigma_{i_1 i_2} + \cdots + \\ + \cdots + \sum_{i_1=1}^{z} \sum_{i_2=1}^{z-1} \cdots \sum_{i_N=1}^{z-1} \sigma_{i_1 \cdots i_{N-1}} \sigma_{i_1 \cdots i_N} \Big) \\ - H\Big(\sigma_0 + \sum_{i_1=1}^{z} \sigma_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{z} \sum_{i_2=1}^{z-1} \sigma_{i_1} \sigma_{i_1 i_2} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{z} \sum_{i_2=1}^{z-1} \cdots \sum_{i_N=1}^{z-1} \sigma_{i_1 \cdots i_N} \Big)$$

とする。ただし，σ_0 は中心格子点のスピン変数，$\sigma_{i_1 \cdots i_s}$ $(1 \leq s \leq N)$ は $(i_1 \cdots i_s)$ でラベルされる格子点のスピン変数で，何れも 1 又は −1 の値を取る。J，H はそれぞれ，最近接相互作用，および外磁場の強さを表わす正の定数で，z は最近接格子点数である。系の大きさは N により表わされる。

この系において，

$$m(s, N, T, H) \equiv \langle \sigma_{i_1 i_2 \cdots i_s} \rangle$$

を $\sigma_{i_1 \cdots i_s}$ の温度 T でのカノニカル平均とし，内部自発磁化，外部自発磁化，平均（1スピン当り）自発磁化として，それぞれ

$$m(s,T) \equiv \lim_{H\to 0+} \lim_{N\to\infty} m(s,N,T,H)$$

$$\overline{m}(s,T) \equiv \lim_{H\to 0+} \lim_{N\to\infty} m(N-s,N,T,H)$$

$$m(T) \equiv \lim_{H\to 0+} \lim_{N\to\infty} m(N,T,H)$$

を定義する。ただし,

$$m(N,T,H) \equiv \frac{\langle\sigma_0\rangle + \sum_{s=1}^{N} \sum_{i_1=1}^{z} \cdots \sum_{i_s=1}^{z} \langle\sigma_{i_1 i_2 \cdots i_s}\rangle}{1 + \sum_{s=1}^{N} \sum_{i_1=1}^{z} \cdots \sum_{i_s=1}^{z} 1}$$

である。

さらに,これらに対応する帯磁率として,

$$\chi(s,T) \equiv \lim_{N\to\infty} \lim_{H\to 0+} \left[\partial m(s,N,T,H)/\partial H\right]$$

$$\overline{\chi}(s,T) \equiv \lim_{N\to\infty} \lim_{H\to 0+} \left[\partial \overline{m}(s,N,T,H)/\partial H\right]$$

$$\chi(T) \equiv \lim_{N\to\infty} \lim_{H\to 0+} \left[\partial m(N,T,H)/\partial H\right]$$

を定義すると,これらについて表1のような結果が証明される。ここで f は正の有限値を表わす。

表 1

温度領域 \ 物理量	$m(s,T)$	$\overline{m}(s,T)$ $m(T)$	$\chi(s,T)$	$\overline{\chi}(s,T)$ $\chi(T)$
(i) $\mathrm{th}(J/kT) < \frac{1}{z-1}$	o	o	f	f
(ii) $\frac{1}{z-1} < \mathrm{th}(J/kT) < \frac{1}{\sqrt{z-1}}$	f	o	∞	f
(iii) $\mathrm{th}(J/kT) > \frac{1}{\sqrt{z-1}}$	f	o	∞	∞

m (T), χ (T) が通常の1スピン当りの自発磁化および帯磁率に当り, 表1に示すように, (iii) の温度領域ではStanley−Kaplan型の磁気的相になっている。

m (T) が常に0であるのは, Bethe 格子が reducibleであることにより, χ (T) が低温で発散するのは, 各格子点のm番目の近接格子点数が, m と共に指数関数的に増大することに負うている。3次元空間の現実の物質でこのような相が生ずるかどうかはよく判らないが, 例えば random なスピン系などで, 相互作用をもつスピン同志のつながりが reducible lattice に近いような場合には, 低温まで自発磁化の発生が押えられ, 大きい帯磁率をもつ場合があるかも知れない。

本報告のくわしい結果は Prog. Theor. Phys. 51 (1974), 1053 にある。

ソフトコアモデルの固相一液相転移

東北大工　桂　重俊

研究会では 1) 第2近接相互作用を有するBeth 格子, 2) ソフトコアモデルの固相ー液相転移, 3) ランダムな Bethe 格子, について述べたが 1) は ref. 1 に 3) は ref. 2 に発表したので本稿では研究会でのべたときの訂正を含めて 2) について書いておく。

格子気体のモデルを考え同じ siteには1個の分子しか入ることが出来ず, 1st neighbor の相互作用を −2J としたモデル ($H = -2J\sum_{nn}\nu_i\nu_j$, $\nu_i = 0, 1$, $J < 0$ で引力) を考える。このモデルを Bethe 近似 (無限に大きい Bethe 格子の厳密解) で扱うには ref. 1 の磁性体の磁場磁化特性を格子気体の圧力体積特性にやきなおせばよい。disordered state (液相) と ordered state (固相) との存在の可能性を考える。

$$x = e^{-J/kT},$$

$$x^{\ell_{\alpha,\beta}} = u_{\alpha,\beta}, \quad z \equiv x^q y = \text{fugacity}$$