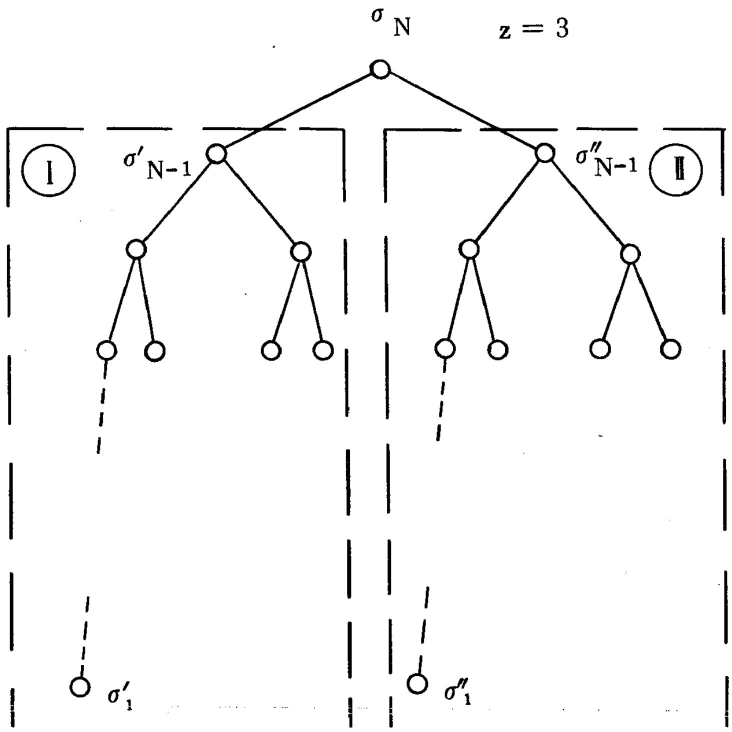
Bethe 格子における固有値問題の方法

東京工大物理　　小　口　武　彦

Bethe 格子では閉じた図形がないことが，1次元格子と類似している。このため Ising model の Bethe 格子に，1次元格子の場合の Kramers−Wannier の固有値問題の方法[1]を適用できる。



図に示すように Ⅰ の系（スピンの総数はN−1 個）で，1番上のスピンが σ'_{N-1} の値（±1の何れか）をとる確率を $P_{\sigma'_{N-1}}$ とし（Ⅱ についても同様），Ⅰ＋Ⅱ にさらに1個のスピン σ_Nを加え（スピンの総数は 2N−1 個になる），そのスピンが σ_N の値をとる確率を P'_{σ_N} とすると，つぎの non−linear な固有値方程式が得られる。

$$\lambda P'_\sigma = \Big[\sum_{\sigma'=\pm 1} e^{K\sigma\sigma' + \frac{1}{z-1} L\sigma} P_{\sigma'} \Big]^{z-1} \tag{1}$$

$$P_+ + P_- = P'_+ + P'_- = 1$$

$$\lambda \equiv \frac{Z_{(z+1)(N-1)+1}}{\left[Z_{N-1} \right]^{z-1}}, \qquad K \equiv \frac{J}{2kT}, \qquad L = \frac{mH}{kT} \tag{2}$$

ただし $Z_{(z-1)(N-1)+1}$，Z_{N-1} はそれぞれ $(z-1)(N-1)+1$ 個および$N-1$ 個のスピン系の状態和，z は最隣接格子点の数（図は $z=3$ の場合）である。 簡単のため $L=0$ とおく。(1) は $P_+ = P_- = P_+ = P_- = ½$，$\lambda = 2\,\mathrm{ch}^2 K$ という解がある

ことはただちにわかる。これはparamagの解である。そこで$P'_{\pm}=\frac{1}{2}\pm\varepsilon'$，$P_{\pm}=\frac{1}{2}\pm\varepsilon$（$\varepsilon$，$\varepsilon'$は微小量）とおくと，（1）より

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=(z-1)\tanh K \tag{3}$$

が得られる。$\varepsilon>\varepsilon'$のときは，外側のスピンに摂動を与えても，内側に入るにつれてdampしてしまうので，paramagの解が安定であるが，$\varepsilon'/\varepsilon>1$となると$P_{\pm}=$ ½ の解は不安定になり，そのときは安定な解は $z=3$ の場合は

$$\lambda_2=2\,\mathrm{sh}\,2K$$

$$P_{\pm}=\frac{2\,\mathrm{sh}\,K\pm e^{-K}\sqrt{(e^{2K}-3)(e^{2K}+1)}}{4\,\mathrm{sh}\,K} \tag{4}$$

が得られる。したがって$(z-1)\tanh K_c=1$が転移点であり，これは当然のことながらBethe 近似の結果と一致する。

注意すべきことは，（2）の定義から，λ はスピン1個あたりの状態和に相当するものであるが，Bethe 格子ではそうではない。それはBethe格子は普通の格子と違ってsiteが同等でないためである。したがって上に得た解は，Bethe 格子の十分内側のスピンに対する解である。

Reference

1） H.A.Kramers and G.H.Wannier : Phys Rev 60 (1941) 252