確率分布関数の漸近評価

九大理　古　川　　浩

熱平衡状態で巨視変数 a の確率分布関数 $P_0(a)$ は $P_0(a) = \exp\{V\zeta_0(a)\}$ と Scale 出来ることはよく知られている。非平衡状態に於いても同様なことが成り立つと考えられる。[1)]

1) 分布関数を次で定義する。

$$P(a,t) = \mathrm{Tr}\ \delta(a - A_H(t))\rho_0 \tag{1}$$

ここで $A_H(t)$ は Heisenberg 表示でのオペレーター：

$$A_H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t>t_1\cdots>t_n} [\cdots[A(t),\ \sigma(t_1)],\ \cdots,\ \sigma(t_n)]\Sigma(t_1) \cdots\cdots \Sigma(t_n), \tag{2}$$

$A(t) = e^{\frac{H_0}{i\hbar}t} A e^{-\frac{H_0}{i\hbar}t}$. $\Sigma(t)$ は外場． 全ハミルトニアンは $H = H_0 + \sigma(t)\ \Sigma(t)$. ρ_0 は初期時刻での密度行列。

2) 初期状態（熱平衡状態）で必要な物理量間の相関が short range だとする。例えば,

$$\begin{aligned} &\langle \sigma(t_1, r_1) \cdots\cdots \sigma(t_m, r_m) \rangle_1, \\ &\langle \cdots\cdots \rangle_0 = \mathrm{Tr}\ \rho_0 \cdots\cdots, \end{aligned} \tag{3}$$

はもし $|t_1 - t_j| > \tau_0$ 又は $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j| > \xi_0$　$(j = 2, \cdots, m)$ のとき $\langle \sigma(t_1, \mathbf{r}_1) \rangle_0 \langle \sigma(t_2, \mathbf{r}_2) \cdots\cdots \sigma(t_m, \mathbf{r}_m) \rangle_0$ 。

3) そのとき

$$\langle \sigma_H^{(n_1)}(t_1, \mathbf{r}_1) \cdots\cdots \sigma_H^{(n_m)}(t_m, \mathbf{r}_m) \rangle_0 \tag{4}$$

も short range であるただし,

$$X_H^{(n)}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t>t_1\cdots>t_m} [\cdots[X(t),\ \sigma(t_1)],\ \sigma(t_n)]\ \Sigma(t_1) \cdots \Sigma(t_n) \tag{5}$$

その理由はくりかえしの commutator，〔〔… 〕…〕，に於いていずれか一つの物理量と他との相関が消えたとき，その commutator は zero となるからである。

4）

$$P^{(n)}(a,t) = \langle \delta(a - \sum_{k=0}^{n} A_H^{(k)}(t)) \rangle_0 = \frac{1}{2\pi}\int ds \exp(isa)\, Q^{(n)}(s,t) \tag{6}$$

ここで

$$Q^{(n)}(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-is)^j}{j!} \langle \{ \sum_{k=0}^{n} A_H^{(k)}(t) \}^j \rangle_0 , \tag{7}$$

$$A_H^{(k)}(t) = \int_V A_H^{(k)}(t,r)\,dr . \tag{8}$$

そのとき，3）より

$$Q^{(n)} = \exp\{ V\, \alpha^{(n)}(is) \} \tag{9}$$

と scale される。したがって $P^{(n)}$ も又

$$P^{(n)}(a,t) = \exp\{ V \eta^{(n)}(\frac{a}{V}, t) \} \tag{10}$$

と scale される。ただし（6）に於いて s の積分は saddle point method が使えると仮定。

5）

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ V\to\infty}} \frac{\ell n\ P^{(n)}(a,t)}{V} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ V\to\infty}} \eta^{(n)}(\frac{a}{V}, t) = \eta(\frac{a}{V}, t) \equiv \frac{\ell n\ P(a,t)}{V} \tag{11}$$

であるから P（a，t）の対数は V に比例する。もし極限（11）が存在すれば

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(a,t) = P(a,t) \doteqdot P^{(n_0)}(a,t) . \tag{12}$$

以上ここで（11）を導くために使った事実は「初期に於いて物理量間の相関が short range であれば，その性質は任意の有限次の摂動によっても保たれる」，ということである。

6）変分との関係

$$P(a,t) = \exp[V\{ f(F,\frac{a}{V}, t) - \psi_0(\frac{a}{V}, t) - \phi_0(F,t) \}] , \tag{13}$$

とおく，F は外場 Σ の大きさ，又かならずしも制限は必要ないが $A \equiv \sigma$ と考えておく。

$$f(0, \frac{a}{V}, t) = f(F, 0, t) = 0 \tag{14}$$

とする。次が常に成立する。

$$\left\langle \frac{\partial\{f(F,\frac{a}{V},t) - \phi_0(F,t)\}}{\partial F} \right\rangle = 0 \tag{15}$$

$$\left\langle \frac{\partial\{f(F,\frac{a}{V},t) - \psi_0(\frac{a}{V},t)\}}{\partial \frac{a}{V}} \right\rangle = 0 \tag{16}$$

ただし $< \cdots\cdots > = \int \cdots P\,da$. もし $P(a, t)$ が $a = a^*$ にするどい極大を持てば (15), (16) は

$$\frac{\partial\{f(F,\frac{a^*}{V},t) - \phi_0(F,t)\}}{\partial F} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\{f(F,\frac{a^*}{V},t) - \psi_0(\frac{a^*}{V},t)\}}{\partial \frac{a^*}{V}} = 0. \tag{18}$$

2つの potential

$$\psi(F,\frac{a}{V},t) = f(F,\frac{a}{V},t) - \psi_0(F,t) \tag{19}$$

$$\phi(F,\frac{a}{V},t) = f(F,\frac{a}{V},t) - \phi_0(\frac{a}{V},t) \tag{20}$$

は変換

$$f(F,\frac{a^*}{V},t) - \phi_0(F,t) - \psi_0(\frac{a^*}{V},t) = 0 \tag{21}$$

で結びついている。すなわち ϕ_0 (or ψ_0) をきめれば ψ_0 (or ϕ_0) がきまる。

古川 浩

熱平衡系では $f(F, \frac{a}{V}) \propto F\frac{a}{V}$ であるが，非平衡状態ではこのような簡単な形にはならない。しかし（すくなくとも）定常状態に於いて $f(x, y) = xy$ となるような適当な変数が存在すれば，変分関数 ϕ_0, ψ_0 を測定量 a^* の関数として求めることが出来る。

参考文献

1) R.Kubo, K.Matsuo and K.Kitahara, J.Stat. Phys. 9 (1973), 51.

2) ここでの議論は

H.Furukawa, preprint

による。