# 粒子がランダムに分布する媒質内における伝搬理論 — 輸送方程式のB−S方程式からの導出

電波研　古　津　宏　一

波動関数に関する2次モーメントがBethe−Salpeter 型の方程式をみたすことはよく知られているが，輸送方程式をこの方程式から厳密に導くことは未だなされていないように思われる。ここでは，Coherent Potential 近似の範囲内で，輸送方程式をB−S 方程式から正確に導かれることを示す。*)

スカラー波$\psi(x)$を考えることとすると，波動方程式は

$$\left[\Delta+k_0^2+q(x)\right]\psi(x) = -\eta(x), \quad q(x) = \Sigma_\alpha\, q_\alpha(x), \tag{1}$$

及び，その複素共役式となる。ここで$\eta(x)$は外部波源であり，第2式における$q_\alpha$ $q_\alpha(x)$は座標$\alpha$に中心をもつ1個の粒子の寄与であり，$\alpha$についての集計は含まれる全粒子の座標について行われるものとする。

波動関数に関する特性汎関数$Z[\bar{\eta}^*,\bar{\eta}]$を

$$Z[\bar{\eta}^*,\bar{\eta}] \equiv \left< \exp\left[\int dx\left\{\bar{\eta}(x)\,\psi(x)+\bar{\eta}^*(x)\,\psi^*(y)\right\}\right]\right> \tag{2}$$

で定義すると，それは次の方程式

$$\left[\!\left[\left[\Delta+k_0^2+\underset{\sim}{q}(x)\right]\delta/\delta\bar{\eta}(x)+\eta(x)\right]\!\right] Z[\bar{\eta}^*,\bar{\eta},c] = 0 \tag{3}$$

及びその複素共役式をみたす解$Z[\bar{\eta}^*,\bar{\eta},c]$から

$$Z[\bar{\eta}^*,\bar{\eta}] = Z[\bar{\eta}^*,\bar{\eta}\ c]\Big|_{c=0} \tag{4}$$

の関係で求められる。ここで$\underset{\sim}{q}(x)$は補助関数$c(x)$に関するオペレーターであり**)，粒子がランダムに分布する現在の媒質の場合は，

*) 詳細は：Radio Science (USA), Jan. 1975, to be pnblished.

**) K. FURUTSU, J. Opt. Soc. Am. 62, 240 (1972).

$$\underset{\sim}{q}(x) = c(x) + n\int d\alpha \left\langle q_\alpha(x)\ \exp\left[\int dx'\ q_\alpha(x')\ \delta/\delta c(x')\right]\right\rangle' \tag{5}$$

で与えられる。上式右辺において n は粒子密度，$\langle \cdots \rangle'$ は中心座標 $\alpha$ 以外の粒子の性質，例えば，大きさ，方向，形状，等についての平均をあらわす。

式（3）－（5）から各次数のグリーン関数のみたす方程式が導ける。例えば1次グリーン関数 $G(x|x')$ の式はよく知られた一般形

$$(\triangle+k_0^2)G(x|x') + \int dx'' M(x|x'')G(x''|x') = -\delta(x-x') \tag{6}$$

で表わされるが，左辺の M は CPA に相当する近似において

$$M(x|x'') \simeq n\int d\alpha \left\langle T_\alpha^M(x|x'')\right\rangle' \tag{7}$$

であることが示される。ここで $T_\alpha^M$ は1個の粒子 $q_\alpha$ による，（6）で記述されるコーヒーレント媒質 M 内における，散乱マトリックスであり，

$$T_\alpha^M = q_\alpha(1-G\ q_\alpha)^{-1} \tag{8}$$

で定義されるが，（6）で与えられる G を通して，未知のマトリックス M に依存する量である。そして M は（7）式をみたすよう決められる。

一方，G(x) のフーリエ変換

$$\tilde{G}(k) = \int dx\ G(x)\ e^{ik\cdot x},\quad k = \ell\Omega,\quad \Omega^2 = 1 \tag{9}$$

（k，Ω はベクトル量）は（6）より

$$\tilde{G}(k) = \tilde{G}(\Omega,\ell) = \left[\ell^2-k_0^2-\tilde{M}(\Omega,\ell)\right]^{-1} \tag{10}$$

の形となるが，粒子の大きさが有限であれば分母の $\tilde{M}$ は $\ell$ に関する entire function である。したがって $\tilde{G}(\Omega,\ell)$ は $\ell$ の複素平面において無限の単純極を持ち，下半面における極を

$$k_n(\Omega),\ n=1,2,3,\cdots,\qquad 0 > \mathrm{Im}[k_n] > \mathrm{Im}[k_{n+1}] \tag{11}$$

とすると，上半面における極は

$$-k_n(-\Omega), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{12}$$

であることが示される。

1次モーメントの場合と同様に，2次モーメント $I(x_1, x_2)$ を

$$I(x_1, x_2) \equiv \langle \psi^*(x_1)\, \psi(x_2) \rangle \equiv I(1,2) \quad . \tag{13}$$

で定義すると，マトリックス形式で次のB−S型方程式をみたす：

$$I(1,2) = G^*(1)\, G(2)\,[M_{11}(1,2)\, I(1,2) + \eta^*(1)\, \eta(2)] \tag{14}$$

ここで，

$$M_{11}(1,2) = n \int d\alpha \langle T_\alpha^{M*}(1)\, T_\alpha^{M}(2) \rangle \tag{15}$$

であり散乱マトリックス $T_\alpha^M$ は（8）で定義される。

さて（14）より輸送方程式が導かれるが結果は次のようになる：波の強度 $I(x)$ ベクトル $W(x)$ は1組のスカラー関数 $I_\nu(\Omega, x)$ を用いて次の無限級数

$$I(x) = I(x_1, x_2)\Big|_{x_1 = x_2 = x} = \Sigma_\nu \int d\Omega\ I_\nu(\Omega, x) \ , \tag{16}$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{i}{2}\,[\partial/\partial x_2 - \partial/\partial x_1]\, I(x_1, x_2)\Big|_{x_1 = x_2 = x} \\ &= \Sigma_\nu \int d\Omega\ \ell_\nu\, \Omega\, I_\nu(\Omega, x) \end{aligned} \tag{17}$$

で表わされる。ここで $I_\nu(\Omega, x)$ は次の微積分方程式の解である：

$$\begin{aligned} &(\Omega \cdot \partial/\partial x + t_\nu)(\ell_\nu / \pi N_\nu)\, I_\nu(\Omega, x) \\ &\quad = \Sigma_\mu \int d\Omega' \widetilde{K}_{\nu\mu}(\Omega | \Omega')\, I_\mu(\Omega', x) + J_{c\nu}(\Omega, x) \end{aligned} \tag{18}$$

上式に含まれる諸パラメーターは

$$\begin{aligned} &\nu = (k_n^*, k_m)\ , \quad \mu = (k_a^*, k_b)\ , \\ &t_\nu = i^{-1}(k_n^* - k_m)(\Omega)\ , \quad \ell_\nu = \frac{1}{2}(k_n^* + k_m)(\Omega), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\widetilde{K}_{\nu\mu}(\Omega|\Omega') = n < \widetilde{T}^{M*}(\Omega, k_n^*|\Omega', k_a^*)\,\widetilde{T}^{M}(\Omega, k_m|\Omega', k_b) >'$$

（19）式において $k_m(\Omega)$, $m = 1, 2, \cdots$, は（11） で定義される1次グリーン関数の極であり，$\widetilde{T}^M$ は（8）の散乱マトリックス $T^M_\alpha$ のフーリェ変換である。又（18）右辺の $J_{c\nu}$ は外部源 $\eta(x)$ により定まる項であり，左辺の $N_\nu = N_{nm}(\Omega)$ は，

$$N_{nm} = (4\pi^3)^{-1}\,\ell_{nm}^3\,g_n^*\,g_m(\Omega),$$
$$g_m(\Omega) = \mathrm{R_{es}}\left[\widetilde{G}(\Omega, \ell)\right]_{\ell=k_m} \tag{20}$$

（18）式は明らかに通常の現象論的輸送方程式に対応する。

散乱粒子にエネルギ損失がない場合のエネルギー保存則は次式で表わされる：

$$\Sigma_\nu \int d\Omega\ \pi\ N_\nu\ \widetilde{K}_{\nu\mu}(\Omega|\Omega') = t_\mu\,\ell_\mu(\Omega') \tag{21}$$

ここでコーヒーレント波の1個の粒子による〔方向$\Omega'$，波数 $k_n$ の平面波から方向$\Omega$，波数 $k_m$ の波への〕散乱振巾 a を自由空間におけると同様に

$$a(\Omega, k_m|\Omega', k_n) = (4\pi)^{-1}\,\widetilde{T}^M(\Omega, k_m|\Omega', k_n) \tag{22}$$

で定義すると，保存則（21）はこの散乱振巾を用いて次のように表わせる。

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \int d\Omega (2\pi)^2 N_{nm}(\Omega) < a^*(\Omega, k_n^*|\Omega', k_a^*)\,a(\Omega, k_m|\Omega', k_b) >'$$
$$= (2i)^{-1} < a^*(\Omega', k_a^*|\Omega', k_a^*) - a(\Omega', k_b|\Omega', k_b) >' \tag{23}$$

上式は通常の光学関係式，即ち，自由空間における1個の粒子の全散乱断面積は入射方向への散乱振巾の虚数部に比例することに対応するものであるが，ここではすべての量はコーヒーレント波のものに置換えられている。又同時に（20）で与えられる（23）式左辺の $N_{nm}$ は $\nu = (k_n^*,\ k_m)$ で表現される1つの複合波のスペクトル密度と解することができる。