3) M. Toda: J. Phy. Soc. Japan Suppl. 26 (1969) 235.
4) M. Toda: Progr. Theor. Phys. Suppl. 45 (1970) 174.
5) H. Flaschka: Phy. Rev. B9 (1974) 1924.
6) H. Flaschka: Progr. Theor. Phys. 51 (1974) 703.
7) M. Héron: Phy. Rev. B9 (1974) 1921.
8) J. Ford, S.D. Stoddard and J.S. Turner: Progr. Theor. Phys. 50 (1973) 1547.
9) N. Ooyama and N. Saito: Progr. Theor. Phys. Suppl. 45 (1970) 201.
10) M. Toda: Phys. Letters 48 A (1974) 335.
11) M. Toda: Arkiv for Det Fysiske Seminar i Trondheim No 2-1974, to be published in Physics Reports.

Thomas―Kuhn の和定理と超流動

東大・教養　伊豆山　健　夫

報　告

そもそも超流動とは何か？　或る粒子系の作る流体が超流動を示すということは，この流体をトーラスの中にいれて，トーラスがその frame に固定された不純物を含んでいても，トーラスを極めてゆっくり回転してやったときに，流体の一部（又は全部）がトーラスの回転についてゆけずに，とり残されてしまうということである。

久保理論（線型応答）の範囲でこのことを数学的に表現すると，以下のようになる。

$$\Lambda \equiv \frac{1}{m} - \mathrm{Lim}\,\frac{2}{N}\overline{\left\langle J\,\frac{Q}{\mathscr{H}^{\times}}\,J\right\rangle}$$

を定義する。但し m は粒子質量，N は粒子数，$J \equiv \sum_{j=1}^{N} p_j^x/m$ は total current の x-成分，$\mathscr{H} = \sum_j \vec{p}_j^{\,2}/2m + V(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N)$ はハミルトニアンで V は不純物ポテンシャルを含む。× は久保の記号で $\mathscr{H}^{\times}\cdots \equiv [\mathscr{H}, \cdots]$，Q は射影演算子で

$$(QJ)_{nm}\begin{cases} = J_{nm} & \text{for} \quad E_n \neq E_m \\ = 0 & \text{for} \quad E_n = E_m \end{cases}$$

但し，

$$J_{nm} = \langle \Psi_n | J | \Psi_m \rangle ,$$

$$\mathscr{H}\,\Psi_n = E_n\,\Psi_n$$

$\langle \cdots\cdots \rangle$ は grand canonical average，また Lim は熱力学的極限（$N\to\infty$，$N/\Omega=$ fixed，Ω は系の体積。また必要とあれば $N_i/\Omega=$ fixed，$N_i=$ 不純物の数，とすることもある）を意味し，—— は不純物分布に関する平均を意味する。さて以上の Λ を用い，流体を周期的箱に入れ“周期的境界条件”の下で

$$\begin{cases} \Lambda > 0 & \text{なら　超流動,} \\ \Lambda = 0 & \text{なら　normal fluid .} \end{cases}$$

なお，周期的箱とは $V(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_j+\vec{L}, \vec{r}_{j+1}, \cdots) = V(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}, \cdots)$ 但し，$\vec{L}=(L,0,0)$ のことである。もし周期系をとらずに，変数 R^{3N} の関数空間をヒルベルト空間とすると，常に $\Lambda=0$ となる。これは Thomas−Kuhn の和定理として知られている。

上記の定義の妥当性は以下の様に考えればわかる。周期的箱に入れた系に対し，一様な外場を加え，これによって各粒子は x 方向に一様な力 $E(t)=E\,e^{\varepsilon t}$（$\varepsilon>0$）を受けるようにする。あるいは，ゲージ場 $F(t)$ を使って $\dot{F}(t)=E(t)$ とすると，ハミルトニアンは

$$\mathscr{H} = \sum_j \frac{1}{2m}(\vec{p}_j + \vec{F}(t))^2 + V$$

となる。$F(t)$ に対する線形応答 current $\overline{J(t)}$ を一粒子当りにして，$j(t) \equiv N^{-1}\overline{J(t)} = \overline{j_s(t)} + \overline{j_n(t)}$ は

$$\begin{cases} \overline{j_s(t)} = \Lambda F(t) \\ \overline{j_n(t)} = \sigma_\varepsilon E(t) \end{cases}$$

と書かれる。但し

$$\begin{cases} \Lambda \equiv \dfrac{1}{m} - \dfrac{2}{N} \overline{< J \dfrac{Q}{\mathcal{H}^\times} J >} \\ \sigma_\varepsilon \equiv \dfrac{2}{N} \overline{< J \dfrac{1}{\mathcal{H}^\times} \dfrac{\varepsilon Q}{(\mathcal{H}^\times)^2 + \varepsilon^2} J >} \end{cases}$$

である。$\Lambda > 0$ なら persistent current $j_s(t)$ があることになり Lim $\Lambda > 0$ ならそのような流れがマクロにあり得ることになる。

$j_n(t)$ は Ohmic current である。Lim を採って，次に $\varepsilon \to 0$ とすると

$$\sigma_\varepsilon \to \sigma = \mathrm{Lim}\, \frac{2}{N} \overline{< J \frac{\delta(\mathcal{H}^\times)}{\mathcal{H}^\times} J >}$$

は Greenwood の公式（を拡張したもの）に他ならない。 ついでであるが，完全伝導 $\sigma \to \infty$ と超伝導 $\Lambda > 0$ とは一応全く別物になっている。

ODLRO がそのまま超流動にはならない例として，一次元理想ボーズ気体をあげる。これを長い環の中に閉じ込め，不純物として δ − ポテンシャルが一箇だけあるとする。先に T＝0 としてから Lim をとる。この系の基底状態では

(1) ODLRO がある： $\overline{<\Psi_0|\psi^+(x)\psi(y)|\Psi_0>} \neq 0$ for $|x-y| \to \infty$,

(2) Bose−Einstein 凝縮もある： $<\Psi_0|a_0^+ a_0|\Psi_0> = 8N/\pi^2$,

(3) が然し，超流動はない： Lim $\Lambda = 0$

では ODLRO があるとした場合，更に何が超流動出現の条件として必要であるかを考える。さきに導いた公式（Prog. Theor. Phys. 50, 841 (1973)）は Q を入れておいてもそのまま成り立ち

$$\Lambda = -2 \frac{L^2}{N} \overline{< J(x') \frac{Q}{\mathcal{H}^\times} J(x'')>} \qquad \text{for } x' \neq x''$$

但し，

$$J(x') \equiv \frac{1}{2m}\sum_j \{p_j^x\,\delta(x_j - x') + \delta(x_j - x')\,p_j^x\}$$

この公式では $|x' - x''|$ を充分大きくとって議論できるので便利。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\left(\int_0^\infty - \int_{-\infty}^0\right) e^{-\varepsilon|t|}\,\overline{<J(\vec{r}',t)\;J(\vec{r}'',0)>}\,dt$$

（但し，$J(\vec{r}')$は流れ密度の演算子で $J(\vec{r}',t) \equiv e^{i\mathcal{H}t}J(\vec{r}')e^{-i\mathcal{H}t}$ ）

を y', z', y'' 及び z'' で積分すると $2\overline{<J(x')\,\frac{Q}{\mathcal{H}^{\times}}\,J(x'')>}$ になる。ところで，

$$\overline{<J(\vec{r}',t)J(\vec{r}'',0)>} = \frac{1}{2m^2}\{\overline{<(\partial'\psi^+(\vec{r}'t))\psi(\vec{r}'t)\psi^+(\vec{r}''0)\partial''\psi(\vec{r}''0)>}$$

$$+\overline{<\psi^+(\vec{r}'t)(\partial'\psi(\vec{r}'t))(\partial''\psi^+(\vec{r}''0))\psi(\vec{r}''0)>}$$

$$+\frac{1}{2}\partial'\partial''\overline{<\rho(\vec{r}'t)\rho(\vec{r}''0)>}\}$$

と書けるが，右辺の最後の項（ここに $\rho(\vec{r})$ は粒子数密度）は系が安定である限り（圧縮率が有限である限り） Λ には寄与しないことがわかる（ $|x'-x''|$ が充分大きいとして）。右辺の第一項及び第二項については decouple する。例えば，第一項は，

$$\overline{<(\partial'\psi^+(\vec{r}'t))(\partial''\psi(\vec{r}''0))>}\;\overline{<\psi(\vec{r}'t)\psi^+(\vec{r}''0)>}$$

だけが残る。かくして

$$\Lambda = -\frac{\overline{|\Phi|^2}}{m\rho}\sum_{k\neq 0} k^2\, e^{ik(x''-x')}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(k,\omega)}{\omega}\,d\omega$$

但し， $k = 2\pi n/L$ ，

$$\overline{<\psi(\vec{r}')\,\psi^+(\vec{r}'')>} = \overline{|\Phi|^2} \quad \text{for } |\vec{r}'-\vec{r}''| \to \infty ,$$

$$A(k,\omega) \equiv <a_k\,\delta(\mathcal{H}^{\times}-\mu-\omega)\,a_k^+> - <a_k^+\,\delta(\mathcal{H}^{\times}+\mu+\omega)\,a_k>$$

で a_k は state $\Omega^{-1/2}\exp(ikx)$ に対する消滅演算子。

また，別に線形応答理論を使って

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\overline{A(k,\omega)}}{\omega} = \frac{m^2 \overline{|\Phi|^2}}{k^2 \tilde{\rho}_s f(k)}$$

但し $\tilde{\rho}_s$ は定数で，二流体論では $\vec{j}_s = \tilde{\rho}_s \,\mathrm{grad}\, S$ （S はオーダーパラメーター Φ の位相）更に $f(k) = 1$ としている。 k が小さいとき $k = 2\pi/L$ まで含め $f(k) = 1$ なら $\Lambda > 0$ である（充分条件）。このとき $\Lambda = m(\overline{|\Phi|^2})^2/\rho\,\tilde{\rho}_s$ 。

ODLRO 即，超流動に対するさきの counter example では $f(k) = 1-(k_0/k)^2$ （但し $k_0 \sim \frac{\pi}{L}$ ）となって $\Lambda = 0$ が再び得られる。

縮退度及び相互作用の対称性と相転移の次数

名大工　中 野 藤 生

相互作用を及ぼし合う多数の単位系の集合（一応格子を形成するものと考える。それに限定されなくともよいが）を考える。単位系の状態をスピン様の変数 σ_i （$= -s, -s+1, \cdots, s-1, s$）を以て表す（$i = 1, 2, \cdots, N$; N は単位系の総数）。簡単のため差し当り相互作用エネルギーを

$$V(\sigma_i, \sigma_j) = -U\sigma_i\sigma_j - W(\sigma_i + \sigma_j) \tag{1}$$

で表す。 i 番単位系の状態 σ_i は $D(\sigma_i)$ 重に縮退しているものとする。このような体系の熱力学的性質を論ずるのに次のような分類が有益である。磁性体の場合は $D(\sigma_i)$ が一定であり，従って $D(\sigma_i) = D(-\sigma_i)$， $V(\sigma_i, \sigma_j) = V(-\sigma_i, -\sigma_j)$ である。こ