戸田盛和

# Wave Propagation in a Non－linear Lattice

東教大光研　戸　田　盛　和

## 1. 運動方程式

非線形相互作用で結ばれた粒子系（1次元非線形格子）の振動に対する厳密解が得られれば，多くの関連する問題の取扱いに寄与するものと思われる。著者はこのような力学系のモデルとして相互作用

$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar + \mathrm{const}$$

を採用した。[1)〜11)] ここに a，b は定数で積 $ab > 0$ である。$b \to 0$ とすれば $\phi(r)$ はパラボリックな調和相互作用（線形格子）を与え，$b \to +\infty$ では剛体球（$ab$ = 有限）の極限を与える。したがって以下に述べる厳密解は線形格子にも，剛体球系にも通用する。

この非線形格子の運動方程式は，格子末端を除けば

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = a \{ e^{-b(y_n - y_{n-1})} - e^{-b(y_{n+1} - y_n)} \}$$

$$n = \cdots, 1, 2, 3, \cdots$$

である。書き直し

$$b\, y_n = Q_n, \quad \sqrt{\frac{ab}{m}}\, t \to t$$

をすれば，次元のない形で，

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}$$

あるいは相対変位

$$r_n = Q_n - Q_{n-1}$$

を用いて，

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}}$$

あるいは“バネの力”

$$f_n = e^{-r_n} - 1$$

を用いて

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1 + f_n) = f_{n-1} + f_{n+1} - 2f_n$$

と書ける。$y_n$, $Q_n$ は格子縦方向の変位と考えてもよいが，慣性モーメント m をもつ棒をバネで結んだ系のねじれ，振動の角と考えた方がわかり易い。また非線形のキャパシタンスをもつ LC はしご回路で $f_n$ を零位差，〔$\log(1+f_n)$〕／$f_n$ をキャパシタンスとした場合としてもよい。

## 2. 特　解

この系を伝わる波動の性質はいくつかの特解によってよく表現される。

$$f_n = \frac{d^2}{dt^2} S_n$$

さらに，

$$S_n = \log \psi_n$$

とおくと便利である。

(1) 1−soliton 解[2)]

$$\psi_n = \cosh(\alpha n \mp \beta t)$$

あるいは

$$\psi_n = 1 + A e^{2(\alpha n \mp \beta t)}$$

とおけば

$$\beta = \sinh \alpha$$

とするとき運動方程式が満される。この解は一つのパルス波（soliton）

$$e^{-r_n}-1=\beta^2\ \mathrm{sech}^2(\alpha n\mp\beta t)$$

を与える。

(2) 2−soliton 解[3)]

$$\psi_n=\cosh(\kappa_1 n-\beta_1 t)+B\cosh(\kappa_2 n-\beta_2 t)$$

あるいは

$$\psi_n=1+A_1 e^{2(\kappa_1 n-\beta_1 t)}+A_2 e^{2(\kappa_2 n-\beta_2 t)}+A_3 e^{2(\kappa_1+\kappa_2)n-(\beta_1+\beta_2)t}$$

とおき，$\kappa_1, \kappa_2$ を勝手に与えて運動方程式が満されるように $\beta_1$, $\beta_2$ およびBあるいは比 $A_1A_2/A_3$ をきめることができる。$\kappa_1 \fallingdotseq \kappa_2$ のとき，この解は2個のパルス（soliton）の衝突・通過を与える。

$$\beta_i^2=\sinh^2\alpha_i \qquad (i=1,2)$$

$\beta_1\ \beta_2>0$ の解は　2個の soliton が同方向に進む解であり，

$\beta_1\ \beta_2<0$ の解は　2個の soliton が逆方向へ進む解である。

(3) N−soliton 解（省略）

(4) 周期解（cnoidal 波）[1)]

$\psi_n \sim \vartheta_0$（楕円 $\vartheta$ 関数）であり，

$$e^{-r_n}-1=(2K\nu)^2\left[\mathrm{dn}^2\left\{2\left(\frac{n}{\lambda}\mp\nu t\right)K\right\}-\frac{E}{K}\right]$$

ここに $K=K(k)$ は母数 $k$ ($0\leq k\leq 1$) の第2種完全楕円積分，$E=E(k)$ は第2種完全楕円積分，dn は Jacobi の楕円関数である。波長 $\lambda$ と母数 $k$ （実際上振幅を与える）をきめると振動数 $\nu$ は分散式

$$2K\nu=\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2K}{\lambda}\right)}-1+\frac{E}{K}\right]^{-1/2}$$

で与えられる。

## 3. 逆散乱の方法

この格子系はマトリックス方程式

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB$$

と同等であることをFlaschka が示した。[5] ここに例えば

$$L_{nn} = b_n = -\frac{1}{2} P_n \left(= -\frac{1}{2} \frac{dQ_n}{dt}\right)$$

$$L_{n,n-1} = L_{n-1,n} = a_n = \frac{1}{2} e^{-(Q_n - Q_{n-1})/2}$$

$$-B_{n,n-1} = B_{n-1,n} = a_n = \frac{1}{2} e^{-(Q_n - Q_{n-1})/2}$$

$$(\text{その他の } L, B \text{ の要素}) = 0$$

である。このマトリックス方程式を逆散乱の方法で解くと無限遠で 0 になるような解が求められることになる。例えばN−soliton 解は[6]

$$\psi_n = \det B^{(n)}$$

ただしB の要素は

$$B_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + c_i c_j \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}$$

ここに $z_j$ ( $|z_j| < 1$, $j = 1, 2, \cdots, N$ ) は任意の定数であり， $c_j(0)$ を任意の数として，その時間変化は

$$c_j = c_j(0)\, e^{t(z_j - z_j^{-1})/2}$$

で与えられる。 $z_j < 0$ は右へ進出 soliton， $z_j > 0$ は左へ進出 soliton をそれぞれ与える。

## 4. 保　存　量

無限の格子では（あるいは周期系で）

$$\text{全運動量} \quad J^{(1)} \equiv \Sigma P_n ,$$

$$\text{全エネルギー} \quad J^{(2)} \equiv \Sigma \left( \frac{1}{2} P_n^2 + X_n \right)$$

ただし，

$$P_n = \frac{dQ_n}{dt}, \quad X_n = e^{-(Q_n - Q_{n-1})}$$

のほかに，

$$J^{(3)} = \Sigma \left\{ \frac{1}{3} P_n^3 + P_n (X_n - X_{n-1}) \right\}$$

等の保存量があることも示される。これらの保存量 $J^{(n)}$ の任意の関数もまた保存量である。Hénon は周期系は，

$$I^{(n)} = \Sigma (-1)^{\ell} P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} \cdots P_{\alpha_h} X_{\beta_1} X_{\beta_2} \cdots\cdots X_{\beta_\ell} \quad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

〔ただし，$h + 2\ell = n$，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h, \beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \beta_2, \cdots \beta_\ell - 1, \beta_\ell)$ はすべて異なるとする。〕で与えられるN個の保存量をもつことを示した。[7] この系は非エルゴード系である。[8),9),10)]

## 5. 連続体の極限

波長が長い極限，あるいは相互作用の定数 b が小さい極限では弱い非線形の波動方程式，すなわち Bonssinesq 方程式，Korteweg−de Vries 方程式が上述のモデルから導かれる。特解，逆散乱の方法，保存量なども上述のものがこれに対応する連続体近似のものにこの極限でつながることが示されている。

## 参　考　文　献


1） M. Toda： J. Phy. Soc. Japan 22 （1967） 431.

2） M. Toda： J. Phy. Soc. Japan 23 （1967） 501.

3) M. Toda: J. Phy. Soc. Japan Suppl. 26 (1969) 235.

4) M. Toda: Progr. Theor. Phys. Suppl. 45 (1970) 174.

5) H. Flaschka: Phy. Rev. B9 (1974) 1924.

6) H. Flaschka: Progr. Theor. Phys. 51 (1974) 703.

7) M. Hénon: Phy. Rev. B9 (1974) 1921.

8) J. Ford, S.D. Stoddard and J.S. Turner: Progr. Theor. Phys. 50 (1973) 1547.

9) N. Ooyama and N. Saito: Progr. Theor. Phys. Suppl. 45 (1970) 201.

10) M. Toda: Phys. Letters 48 A (1974) 335.

11) M. Toda: Arkiv for Det Fysiske Seminar i Trondheim No 2−1974, to be published in Physics Reports.

# Thomas—Kuhn の和定理と超流動

東大・教養　伊豆山　健　夫

## 報　告

そもそも超流動とは何か？　或る粒子系の作る流体が超流動を示すということは，この流体をトーラスの中にいれて，トーラスがその frame に固定された不純物を含んでいても，トーラスを極めてゆっくり回転してやったときに，流体の一部（又は全部）がトーラスの回転についてゆけずに，とり残されてしまうということである。

久保理論（線型応答）の範囲でこのことを数学的に表現すると，以下のようになる。

$$\Lambda \equiv \frac{1}{m} - \mathrm{Lim}\,\frac{2}{N}\overline{\left\langle J\,\frac{Q}{\mathscr{H}^{\times}}\,J\right\rangle}$$

を定義する。但し m は粒子質量，N は粒子数，$J \equiv \sum_{j=1}^{N} p_j^x / m$ は total current の x−成分，$\mathscr{H} = \sum_j \vec{p}_j^{\,2}/2m + V(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N)$ はハミルトニアンで V は不純物ポテンシャルを含む。× は久保の記号で $\mathscr{H}^{\times}\cdots \equiv [\mathscr{H}, \cdots]$，Q は射影演算子で