指 数 格 子 の 研 究

京大理　　成 田 和 明

（２月８日受理）

§1. 序　　論

指数格子は戸田格子とも呼ばれ，その運動方程式 $\ddot{u}_u = e^{u_{n-1}} + e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n}$ は微分差分方程式の一例となっている。§2ではこのような微分差分方程式に対し，変換によって当該方程式を導出可能な別の一元内至多元連立の微分差分方程式を当該方程式の原方程式と呼び，種々の原方程式を求め，更にその特殊解を調べる。§3では，一般には特別の場合に限って二つ（以上）の独立な方程式を分離する様な連立方程式を二つ（以上）の当該方程式の結合と呼び，文脈に沿って結合を求め，更にその特殊解を調べる。

§2. 分解法

§§2－1，一般論

(1)　$N_i = f(M_i)\, g(M_{i+1})$ によって

$$\frac{\dot{N}_i}{N_i} = A_i \frac{g(M_i)}{g'(M_i)} + A_{i+1} \frac{f(M_{i+1})}{f'(M_{i+1})}, \quad g'(M_i) \equiv \frac{dg(Mi)}{dM_i}$$

の形になるならば，原方程式は，

$$\dot{M}_i = A_i \frac{f(M_i)\, g(M_i)}{f'(M_i)\, g'(M_i)}$$ である。

(2)　$\dot{N}_i = (f_{i-1} - f_{i+1})\, g(N_i)$ の型の方程式

1）変換　$v_i = \int \frac{N_i\, dN_i'}{g(N_i')}$ によって

$\dot{v}_i = F_{i-1} - F_{i+1}$ に変わる。

従って(2)では既にこの型に直されているとする。ここで例えば f_{i-1} は f_i の陽な表現に於ける変数の添字を全て $i \to i-1$ に変えたものを指す。

1)－i)　変換　$v_i = w_{i-1} - w_{i+1}$の時

原方程式は

$$\dot{w}_i = F_i + C$$ である。

1)－ii)　変換　$v_i = w_i - w_{i+1}$　のとき

原方程式は

$$\dot{w}_i = F_{i-1} + F_i + C$$ である。

1)－iii)　変換　$v_i = w_i + w_{i+1}$　の時

原方程式は

$$\dot{w}_i = F_{i-1} - F_i$$ である。

2)　f_i が N_i だけの函数の時，変換

$$v_i = \int^{N_i} \frac{f(N_i') + C}{g(N_i')}\, dN_i'$$

$$G_i(v_i) = (f_{i-1}(N_{i-1}) + C)(f_i(N_i) + C)$$

により，$\dot{v}_i = G_i - G_{i+1}$　となる。

変換　$v_i = w_i - w_{i+1}$　の時

原方程式は

$$\dot{w}_i = G_i + D$$ である。

§§2－2　戸田格子の原方程式及び特殊解

戸田方程式 $\ddot{v}_i = e^{u_{i-1}} + e^{u_{i+1}} - 2e^{u_i}$ は，§§2－1と同様な方法又はそれに属さない方法のいずれによっても原方程式を求め得る。

(1)　前者に属するもの

1)　変換　$u_i = v_{i-1} + v_{i+1} - 2v_i$　の時

原方程式は

$$\ddot{v}_i = e^{u_i} + C$$ である。

2)　変換　$u_i = v_i - v_{i-1}$　の時

原方程式は

$$\ddot{v}_i = e^{u_{i+1}} - e^{u_i} \text{ である。}$$

(2) 一階化の方法

1) 片指数型の一階化。これは $\dot{u}_i = \sum_j c_j p_j \quad \dot{p}_j = \sum_j D_j e^{u_j}$ の形を指す。

C_j, D_j は次のような演算によって求め得る。

$$
\begin{array}{ll}
\text{i)} & \quad 1 \quad -1 \\
\text{ii)} & +) \; -(1 \quad -1) \\
\hline
 & \quad 1 \quad -2 \quad 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcccc}
\text{iii)} & 1 & -2 & 1 & \\
 & 2\times(1 & -2 & 1) & \\
+) & & 1 & -2 & 1 \\
\hline
 & 0 & -2 & 0 & 1
\end{array}
$$

1)－i)
$$\begin{cases} \dot{u}_i = p_{i-1} - p_{i+1} \\ \dot{p}_i = e^{u_{i-1}} - e^{u_{i+1}} \end{cases}$$

$e^{u_i} = N_i$, $p_i = M_i$ と置くと Volterra 類似の式

$$\begin{cases} \dot{N}_i = (M_{i-1} - M_{i+1})N_i \\ \dot{M}_i = N_{i-1} - N_{i+1} \end{cases} \quad \text{が成立つ。}$$

*) 特殊解

$$X \equiv \alpha i + \beta t : N_i = \frac{C_2}{\cosh X + C_1} + C_3, \; M_i = \frac{D_2}{\cosh X + D_1} + D_3$$

と置いて係数比較により未知数を求めると，係数比較式中に恒等式を生じ結果的には，

α, β, D_3 を任意として

$$\begin{cases} N_n = \dfrac{\pm\dfrac{\beta^2}{2}}{\cosh X \pm 1} + \dfrac{\beta^2}{4\sinh^2\alpha} \\[2ex] M_n = \dfrac{\mp\beta\sinh\alpha}{\cosh X \pm \cosh\alpha} + D_3 \end{cases} \quad \text{と求まる。}$$

これは周知の戸田 Soliton に接続する。

1)－ii)

$$\begin{cases} \dot{u}_i = p_{i+1} - p_i \\ \dot{p}_i = e^{p_i} - e^{p_{i-1}} \end{cases}$$

1)－i) では奇数番号の上の戸田方程式であるが，これは全番号上の式となる。

1)－iii)

$$\begin{cases} \dot{u}_i = p_{i-1} + p_{i+1} + 2p_i \\ \dot{p}_i = e^{r_{i-1}} + e^{r_{i+1}} - 2e^{r_i} \end{cases}$$

これは Hamiltonian $H = \sum_k (p_k + p_{k+1})^2 + \sum_j (e^{r_j} - e^{r_{j-1}})^2$ 上の運動である。

§§2－1 の方法を適用すると，$p_i = m_i - m_{i+1}$，$r_i = n_i + n_{i+1}$ の時，

原方程式は

$$\begin{cases} \dot{m}_i = (e^{n_{i-1}} - e^{n_{i+1}})\, e^{n_i} \\ \dot{n}_i = m_{i-1} - m_{i+1} \end{cases}$$ となる。

$e^{n_i} = N_i$，$e^{m_i} = M_i$ とおくと，Voterra 類似の式

$$\begin{cases} \dot{M}_i = (N_{i-1} - N_{i+1})\, N_i \\ \dot{N}_i = (M_{i-1} - M_{i+1})\, N_i \end{cases}$$ が得られる。

*) 特殊解

$X = \alpha i + \beta t$: $M_i = \dfrac{D_2}{\cosh X + D_1} + D_3$，$N_i = \dfrac{C_2}{\cosh X + C_1} + C_3$

と置いて係数比較により未知数を求めると，係数比較式中に恒等式を生じ結果的には，α，β，D_3 を任意として

$$\begin{cases} M_n = \dfrac{\mp \beta \sinh \frac{\alpha}{2}}{\cosh X \pm \cosh \frac{\alpha}{2}} + D_3 \\[2ex] N_n = \pm \left(\dfrac{\pm \beta \sinh \frac{\alpha}{2}}{\cosh X \pm \cosh \frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\beta}{2 \sinh \frac{\alpha}{2}} \right) \end{cases}$$

(± は同順) が求まる。

2) 双指数型の一階化

2)－i)

$$\begin{cases} \dot{v}_i = e^{w_{i+1}} - e^{w_i} \\ \dot{w}_i = e^{v_i} - e^{v_{i-1}} \end{cases}$$

$u_i = v_i + w_i$ に対して全番号上の戸田方程式が成立する。$e^{v_i} = N_i$，$e^{w_i} = M_i$ と置くと，

$$\begin{cases} \dot{N}_i = (M_{i+1} - M_i) N_i \\ \dot{M}_i = (N_i - N_{i-1}) M_i \end{cases}$$

対応した線型方程式は

$$\begin{cases} \dot{N}_i = M_{i+1} - M_i \\ \dot{M}_i = N_i - N_{i-1} \end{cases}$$ で

N_i , M_i に対して独立した格子振動の式が得られる。

*) 特殊解①

$M_i = \dfrac{D_1}{\alpha i + \beta t} + D_2$, $N_i = \dfrac{C_1}{\alpha i + \beta t} + C_2$ と置いて係数比較により未知数を求めると, α, βを任意として

$$\begin{cases} M_i = \beta \left(\dfrac{1}{\alpha i + \beta t} - \dfrac{1}{\alpha} \right) \\ \\ N_i = -\beta \left(\dfrac{1}{\alpha i + \beta t} + \dfrac{1}{\alpha} \right) \end{cases}$$ が求まる。

② $X = \alpha i + \beta t$: $M_i = \dfrac{D_2}{e^X + D_1} + D_3$, $N_i = \dfrac{C_2}{e^X + C_1} + C_3$

と置いて係数比較により未知数を求めると, α, β, C_1 を任意として二つの分岐

$$\begin{cases} M_i = \beta \left(\dfrac{-C_1}{e^X + C_1} + \dfrac{1}{1 - e^\alpha} \right) \\ \\ N_i = \beta \left(\dfrac{C_1}{e^X + C_1} + \dfrac{e^\alpha}{1 - e^\alpha} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_i = \beta \left(\dfrac{e^\alpha C_1}{e^X + e^\alpha C_1} + \dfrac{e^\alpha}{1 - e^\alpha} \right) \\ \\ N_i = \beta \left(\dfrac{-C_1}{e^X + C_1} + \dfrac{1}{1 - e^\alpha} \right) \end{cases}$$ が求まる。

2)－ii) $\dot{v}_i = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}}$

$u_i = v_i + v_{i+1}$ と置くと, 奇数番号の上の戸田方程式が成立する。 $e^{v_i} = N_i$ とおくと

$$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1}) N_i$$

以後この式を単に Volterra の式と呼ぶ。

一般化された式

$$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1} + f_i(t)) N_i$$

の時に，戸田方程式が u_i に対して成立する為の条件は，

$R_i = \dot{f}_i - (N_{i+1} f_{i+1} - N_{i-1} f_{i-1})$ に対して，$R_i + R_{i+1} = 0$ で与えられる。

又，

$$\begin{cases} q_i = v_{2i} + v_{2i-2} + \cdots \\ p_i = v_{2i+1} \end{cases}$$

で座標と運動量を定義すれば

$$H = \sum_i e^{v_i}$$

に対して q_i，p_i は Hamilton の運動方程式を満足する。

*) 特殊解

$X = \alpha i + \beta t$: $N_i = \dfrac{C_3}{\mathrm{dn} X + C_1} + C_2$ と置いて係数比較により未知数を求めると，同数の係数比較式を得，α, β, k を任意として四つの分岐

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{-\beta}{2\,\mathrm{sn}\alpha} \left\{ \dfrac{\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha} + (1 - \mathrm{dn}\,\alpha) \dfrac{\mathrm{dn}\,X \mp \mathrm{dn}\dfrac{\alpha}{2}}{\mathrm{dn}\,X \pm \mathrm{dn}\dfrac{\alpha}{2}} \right\} \\[2em] N_i = \dfrac{\beta}{2\,\mathrm{sn}\,\alpha} \left\{ \dfrac{\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha} - (1 - \mathrm{dn}\,\alpha) \dfrac{\mathrm{dn}\,X \mp \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{dn}^{-1}\dfrac{\alpha}{2}}{\mathrm{dn}\,X \pm \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{dn}^{-1}\dfrac{\alpha}{2}} \right\} \end{cases}$$

を得る。第二式は $\alpha + 2K = \alpha'$ に対して第一式と同型になる。ここに K は第一種完全楕円積分。$k \to 1$ の極限で次の式になる。

$$N_i \to \begin{cases} \dfrac{-\beta \sinh\dfrac{\alpha}{2}}{\cosh\dfrac{\alpha}{2} \pm \cosh X} - \dfrac{\beta}{2\sinh\alpha} & (\text{第一式}) \\[2em] \dfrac{-\beta}{2\tanh\alpha} & (\text{第二式}) \end{cases}$$

2)−iii)
$$\begin{cases} \dot{v}_i = e^{w_{i-1}} - e^{w_{i+1}} \\ \dot{w}_i = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}} \end{cases}$$

$u_i' = v_i + w_{i+1}$, $u_i^2 = w_i + v_{i+1}$ と置くと，u_i^1，u_i^2 の各々に対して奇数番号の上の戸田方程式が成立する。$e^{v_i} = N_i$，$e^{w_i} = M_i$ と置くと，

$$\begin{cases} \dot{N}_i = (M_{i-1} - M_{i+1}) N_i \\ \dot{M}i = (N_{i-1} - N_{i+1}) M_i \end{cases}$$

以後この式を二元 Volterra 式と呼ぶ。

*) 特殊解①

$$X = \alpha i + \beta t : N_i = \frac{C_2}{\mathrm{sn}\, X + C_1} + C_3, \quad M_i = \frac{D_2}{\mathrm{sn}\, X + D_1} + D_3$$

と置いて係数比較により未知数を求めると，係数比較式の中に重複した式を生じ，結果的には α，β，k，C_1 を任意として次式を得る。

$$\begin{cases} N_i = \triangle\!\!\!\!{\scriptstyle\pm}\, \beta \sqrt{(k^2 C_1^2 - 1)(C_1^2 - 1)} \dfrac{1}{\mathrm{sn}\, X + C_1} \mp \dfrac{1 - D_1^2 k^2\, \mathrm{sn}^2 \alpha}{2\, \mathrm{sn}\, \alpha \sqrt{(k^2 D_1^2 - 1)(D_1^2 - 1)}} \\ M_i = \pm \beta \sqrt{(k^2 D_1^2 - 1)(D_1^2 - 1)} \dfrac{1}{\mathrm{sn}\, X + D_1} \triangle\!\!\!\!{\scriptstyle\pm} \dfrac{1 - C_1^2 k^2\, \mathrm{sn}^2 \alpha}{2\, \mathrm{sn}\, \alpha \sqrt{(k^2 C_1^2 - 1)(C_1^2 - 1)}} \end{cases}$$

ここに$\triangle\!\!\!\!{\scriptstyle\pm}$，$\pm$は同順。ただし C_1 と D_1 の間には次の関係がある。

$$(C_1^2 - 1)(D_1^2 - 1) - (C_1 D_1\, \mathrm{dn}\, \alpha - \mathrm{cn}\, \alpha)^2 = 0$$

k→1 の極限で次の式になる。

$$\begin{cases} N_i \to \triangle\!\!\!\!{\scriptstyle\pm}\, \beta \left\{ \dfrac{C_1^2 - 1}{\tanh X + C_1} \mp \dfrac{1 + \tanh^2 \alpha}{2 \tanh \alpha} \boxed{\pm} C_1) \right\} \\ M_i \to \pm \dfrac{\beta}{\cosh^2 \alpha (1 \boxed{\pm} C_1 \tanh \alpha)} \left\{ \dfrac{C_1^2 - 1}{(1 \boxed{\pm} C_1 \tanh \alpha) \tanh X + C_1 \boxed{\pm} \tanh \alpha)} \right. \\ \qquad \left. \triangle\!\!\!\!{\scriptstyle\pm} \dfrac{1 \boxed{\mp} C_1 \tan \alpha}{2 \tanh \alpha} \right\} \end{cases}$$

② $$X = \alpha i + \beta t : N_i = \frac{C_2}{\mathrm{dn}\, X + C_1} + C_3, \quad M_i = \frac{D_2}{\mathrm{dn}\, X + D_1} + D_3$$

と置いて係数比較により未知数を求めると，係数比較式の中に重複した式を生じ，結果的には α，β，k，C_1 を任意として次式を得る。

$$\left\{\begin{aligned} N_i &= \overset{\triangle}{\pm}\,\beta\sqrt{(1-C_1^2)(C_1^2+k^2-1)}\left(\frac{1}{\operatorname{dn}X+C_1}\mp\frac{D_1^2\operatorname{sn}^2\alpha+\operatorname{cn}^2\alpha}{2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\sqrt{(1-D_1^2)(D_1^2+k^2-1)}}\right)\\ M_i &= \pm\,\beta\sqrt{(1-D_1^2)(D_1^2+k^2-1)}\left(\frac{1}{\operatorname{dn}X+D_1}\;\overset{\triangle}{\pm}\;\frac{C_1^2\operatorname{sn}^2\alpha+\operatorname{cn}^2\alpha}{2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\sqrt{(1-C_1^2)(C_1^2+k^2-1)}}\right)\end{aligned}\right.$$

ここに $\overset{\triangle}{\pm}$，$\pm$ は同順。ただし，C_1 と D_1 の間には次の関係がある。

$$(C_1^2-1)(D_1^2-1)\operatorname{cn}^2\alpha-(C_1D_1-\operatorname{dn}\alpha)^2=0$$

$C_1=D_2$ の時 2)－ii) の特殊解に一致する。

k→1 の極限で次の式になる。

$$\left\{\begin{aligned} N_i &\to \pm\,\beta\sqrt{C_1^2-1}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}X+C_1}+\frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha(C_1\operatorname{sh}\alpha\pm\sqrt{C_1^2-1}\,\operatorname{ch}\alpha)}\right)\\ M_i &\to -\beta(C_1\operatorname{sh}\alpha\pm\sqrt{C_1^2-1}\,\operatorname{ch}\alpha)\times\end{aligned}\right.$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{ch}X+C_1\operatorname{ch}\alpha\pm\sqrt{C_1^2-1}\,\operatorname{sh}\alpha}\mp\frac{1}{2\sqrt{C_1^2-1}\,\operatorname{sh}\alpha}\right)$$

ただし $\pm$ は同順。

§§2－3 Volterraの式の原方程式及び特殊解

(1) §§2－1(1)の方法による。§§2－1(1)に於いて

$$f(M_i)=M_i,\quad g(M_i)=1-M_i,\quad A_i=M_{i+1}-M_{i-1}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{\dot N_i}{N_i} &= N_{i-1}-N_{i+1}\\ &= M_{i-1}(1-M_i)-M_{i+1}(1-M_{i+2})\\ &= (M_{i-1}-M_{i+1})(1-M_i)-(M_i-M_{i+2})M_{i+1}\\ &= A_i\frac{g(M_i)}{g'(M_i)}+A_{i+1}\frac{f(M_i)}{f'(M_i)}\end{aligned}$$

したがって原方程式は

$$\dot{M}_i = A_i \frac{f(M_i)\,g(M_i)}{f'(M_i)\,g'(M_i)}$$
$$= (M_{i-1} - M_{i+1})\,M_i(1 - M_i) \cdots\cdots ①$$

この型の式は Cowan によって神経回路網の方程式として調べられたので，以後この式を Cowan 方程式と呼ぶ。

注）今①式が成立つとし，$S_i = M_i M_{i+1}$，$T_i = (1-M_i)(1-M_{i+1})$ と置くと，S_i，T_i に対して次の二元 Volterra 式

$$\begin{cases} \dot{S}_i = (T_{i+1} - T_{i-1})\,S_i \\ \dot{T}_i = (S_{i+1} - S_{i-1})\,T_i \end{cases}$$ が成立つ。

*）特殊解①

$X = \alpha i + \beta t : M_i = \dfrac{C_2}{\mathrm{dn}\,X + C_1} + C_3$ と置いて係数比較により未知数を求めると，同数の係数比較式を得，α，β，k を任意として次式を得る。

$W = C_3(1 - C_3)$ の時

$$C_1 = \triangle \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}\left(\frac{2}{\beta}W - \frac{\mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}\right)}$$

$$C_2 = \boxed{\pm} \frac{2W - \dfrac{\beta\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha}}{\sqrt{1 - 4W}}$$

ここに，

$$W = \frac{\beta/2}{\mathrm{sn}\alpha - 2\beta\,\mathrm{cn}\alpha}\left(\frac{\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{cn}\alpha} - \beta\frac{1 + \mathrm{dn}^2\alpha}{\mathrm{sn}\alpha} \pm k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\sqrt{(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)}\right)$$

ただし

$$\beta_{\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{sn}\alpha\left\{\mathrm{dn}\alpha + k^2 - 1 \pm \sqrt{(\mathrm{dn}\alpha + k^2\,\mathrm{cn}\alpha + k^2 - 1)(\mathrm{dn}\alpha - k^2\,\mathrm{cn}\alpha + k^2 - 1)}\right\}}{k^2\,\mathrm{cn}\alpha(1 + \mathrm{dn}\alpha)}$$

$k \to 1$ の極限で次の式になる。

$$M_i = \frac{\text{▲}\boxed{\pm}\dfrac{\beta(\cosh\alpha-1)\sqrt{2(\cosh\alpha-\beta\sinh\alpha-1)}}{\sinh^2\alpha(\sinh\alpha-2\beta)^2}}{\cosh X \pm \sqrt{\dfrac{2(\cosh\alpha-\beta\sinh\alpha-1)}{\sinh\alpha(\sinh\alpha-2\beta)}}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(1\boxed{\pm}\frac{\sinh\alpha-2\beta\cosh\alpha}{\sqrt{\sinh\alpha(\sinh\alpha-2\beta)}}\right)$$ ▲，$\boxed{\pm}$ は同順。

特殊解②

$$M_i = \frac{A}{\sinh X} + B : X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数比較により未知数を求めると，

$$\begin{cases} M_i = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \dfrac{\sinh\alpha}{\sinh X}\right) \\ \beta = -\dfrac{1}{2}\sinh\alpha \end{cases}$$

を得る。

(2) §§ 2−1 (2)の方法による。

1) 1)−i) の方法。$\dot{v} = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}}$ の時 $v_i = w_{i-1} - w_{i+1}$ に対して原方程式は

$$\dot{w}_i = e^{w_{i-1} - w_{i+1}} + C$$

$M_i = e^{w_i}$ と置くと

$$\dot{M}_i = \left(\frac{M_{i-1}}{M_{i+1}} + C\right) M_i$$

特に $C=-1$ の時 $\dot{M}_i = (M_{i-1} - M_{i+1})\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$

*) $C=-1$ の時の特殊解

$$M_{2i} = A_1\frac{e^X + D}{e^X + B}, \quad M_{2i-1} = A_2\frac{e^X + Be^{\alpha}}{e^X + D} : X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数比較により未知数を求めると，A_1，A_2 は式中に現れず，B，D に対して二元連立の同次方程式を得，行列式＝0の条件から α と β の間に分散関係

$\beta = \pm 2\sinh\frac{\alpha}{2}$ を得る。この時複号の各々に対して

$$D = \begin{cases} -B\tanh\frac{\alpha}{4} \\ \\ -B\cosh\frac{\alpha}{4} \end{cases}$$ を得る。

2）1－ii）の方法

a）$\dot{v} = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}}$ の時 $v_i = w_i - w_{i+1}$ に対して原方程式は

$$\dot{w}_i = e^{w_{i-1} - w_i} + e^{w_i - w_{i+1}} + C$$

$M_i = e^{w_i}$ と置くと，

$$\dot{M}_i = \left(\frac{M_{i-1}}{M_i} + \frac{M_i}{M_{i+1}} + C\right) M_i$$

b）$\dot{N}_i = N_{i-1}N_i - N_i N_{i+1}$ の時 $N_i = M_i - M_{i+1}$ に対して原方程式は，

$$\dot{M}_i = (M_{i-1} - M_i)(M_i - M_{i+1}) + C$$

この時

$$\ddot{M}_i = (M_{i-2} + M_{i+2} - 2M_i)(M_{i-1} - M_i)(M_i - M_{i+1})$$
$$= (M_{i-2} + M_{i+2} - 2M_i)(\dot{M}_i - C)$$

又は

$$\frac{d}{dt}\log(\dot{M}_i - C) = M_{i-2} + M_{i+2} - 2M_i$$

従って M_i は戸田の論文中に言及されている S_n と本質的に同一である。

*）　C＝0の時の特殊解

$M_i = \frac{1}{t}(ai^2 + bi + C)$ と置いて係数比較により未知数を求めると，b を任意として次式を得る。

$$M_i = \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{4}i^2 + bi + \frac{1}{16} - b^2\right)$$

3)　1)－iii) の方法

a)　$v_i = w_i + w_{i+1}$の時，$\dot{v}_i = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}}$に対する原方程式は

$$\dot{w}_i = (e^{w_{i-1}} - e^{w_{i+1}})\, e^{w_i}$$

$N_i = e^{w_i}$ とおくと，

$$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1})\, N_i^2$$

以後この方程式を N^2 方程式と呼ぶ。$L_i = \dfrac{1}{N_i}$ と置くと L_i に対して

$$\dot{L}_i = \frac{1}{L_{i+1}} - \frac{1}{L_{i-1}}$$ が成立つ。

以後この式をL方程式と呼ぶ。

*)　特殊解①

$X = \alpha i + \beta t$: $N_i = A\,\mathrm{dn}^2 X + B$ と置いて係数比較により未知数を求めると，α, β, kを任意として次式が求まる。

$$N_i = \pm\sqrt{\frac{-\beta\,\mathrm{sn}^3\alpha}{2\,\mathrm{dn}\alpha\,\mathrm{cn}\alpha}}\left(\mathrm{dn}^2 X + \frac{\mathrm{cn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha}\right)$$

②　$X = \alpha i + \beta t$, $N_i = \dfrac{C_2}{\cosh X + C_1} + C_3$ と置いて係数比較により未知数を求めると，α, β, を任意として次式が求まる。

$$N_i = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\sinh\alpha}}\ \frac{\cosh X \pm \cosh\alpha}{\cosh X \pm 1}$$

①に於いて $\alpha = 2\alpha'$ とし，$k \to 1$ の極限をとると，②の$+$分岐に一致する。

③　L方程式の特殊解

$$L_{2i} = Ae^{\alpha\cdot 2i + \beta t}\ ,\quad L_{2i+1} = Ae^{-\alpha(2i+1) - \beta t}$$

と置き，方程式を分解して未知数を求めると，$A = \pm 1$, $\beta = \pm 2\sinh\alpha$ を得る。（$\pm$は同順）

b)　1)－iii) の方法の拡張

1))　$v_i = w_i + w^*_{i+1}$ の時，$\dot{v}_i = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}}$ に対する原方程式は

$$\dot{w}_i = (e^{w_{i-1}} - e^{w_{i+1}})\, e^{w_i^*}$$

従って $N_i = e^{w_i}$ と置くと

$$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1}) N_i N_i^*$$

ここで＊印は必ずしも複素共役を意味せず，単に＊＊＝＊なしという規約しか用いなかった。尚

$$\dot{N}_i = (N_{i-1}^* - N_{i+1}^*) N_i^2$$ に対しては，

$M_i = N_i N_{i+1}^*$ の満足する方程式は

$$\dot{M}_i = (M_{i-1}^* - M_{i+1}^*) M_i$$ であるから，

$M_i = S_i$, $M_i^* = T_i$ に対し二元Volterra式が得られる。

2)　Volterra方程式として $\dot{v} = e^{v_{n-\ell}} - e^{v_{n+\ell}}$ の形を措定すると§2−2(2)1)に習って種々の拡張が可能である。例えば $\ell = 2$ の時次のような演算を考える。

i)
$$\begin{array}{rrrrr}
1 & 1 & & & \\
-(1 & 1) & & & \\
 & & 1 & 1 & \\
 & & -(1 & 1) & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rrrrr}
1 & 1 & 1 & 1 & \\
-(1 & 1 & 1 & 1) & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

iii)
$$\begin{array}{rrrrr}
1 & -1 & 1 & -1 & \\
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

1)からは， $v_i = w_i - w_{i+1} + w_{i+2} - w_{i+3}$ の時

原方程式は，

$$\dot{w}_i = e^{v_{i-2}} + e^{v_{i-1}} + C$$

ii)からは $v_i = w_i - w_{i+1}$ の時，原方程式は，

$$\dot{w}_i = e^{v_{i-2}} + e^{v_{i-1}} + e^{v_i} + e^{v_{i+1}} + C$$

iii)からは $v_i = w_i + w_{i+1}$ の時，原方程式は

$$\dot{w}_i = e^{v_{i-2}} + e^{v_{i-1}} + e^{v_i} + e^{v_{i+1}}$$ となる。

3)) 2) と同様な方法で，更に原方程式が，周期的な番付けの際にセクション毎に異ってよいものとすると，更に広く拡張される。その応用として 3) a) の原方程式の右辺に，$i=2j$ の時 C を，$i=2j-1$ の時に $-C$ を加えたものを新たに原方程式として採用できる。

4) §§2−1(2)の方法。

$f(N_i) = g(N_i) = N_i$ により

$$v_i = N_i + C\log N_i$$

となり N_i は v_i によって解析的に表現できない。

5) $\dot{v}_i = e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}}$ に対し，$v_i = x_i + y_i$ と置くと

i) $\dot{v}_i = e^{y_{i+1}}(e^{x_{i-1}} - e^{x_{i+1}}) + e^{x_{i-1}}(e^{y_{i-1}} - e^{y_{i+1}})$

ii) $\dot{v}_i = e^{x_{i+1}}(e^{y_{i-1}} - e^{y_{i+1}}) + e^{y_{i-1}}(e^{x_{i-1}} - e^{x_{i+1}})$

従って i) からは原方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (e^{x_{i-1}} - e^{y_{i+1}})\, e^{y_{i+1}} \\ \dot{y}_i = (e^{y_{i-1}} - e^{y_{i+1}})\, e^{x_{i-1}} \end{cases}$$

又は

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (e^{y_{i-1}} - e^{y_{i+1}})\, e^{x_{i-1}} \\ \dot{y}_i = (e^{x_{i-1}} - e^{x_{i+1}})\, e^{y_{i+1}} \end{cases}$$

が得られる。 ii) も同様である。この操作は無際限に続けることが出来，一般に右辺に $(e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}})$ を含む方程式全部に適用可能である。又直ちに三つ以上に分解することも出来る。例えば $v_i = x_i + y_i + z_i$ に対し，

$$e^{v_{i-1}} - e^{v_{i+1}} = e^{y_{i-1}+z_{i+1}}(e^{x_{i-1}} - e^{x_{i+1}}) + e^{x_{i+1}+z_{i-1}}(e^{x_{i-1}} - e^{x_{i+1}})$$
$$+ e^{x_{i+1}+y_{i+1}}(e^{z_{i-1}} - e^{z_{i+1}})$$

§§2−4 N^2方程式の原方程式及び変形

N^2方程式

$$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1}) N_i^2$$

は変換 $L_i = \dfrac{1}{N_i}$ によりL方程式に変換される。

$$\dot{L}_i = \frac{1}{L_{i+1}} - \frac{1}{L_{i-1}}$$

類似の次式

$$\begin{cases} \dot{L}_i = \dfrac{1}{M_{i-1}} - \dfrac{1}{M_{i+1}} \\ M_i = \dfrac{1}{L_{i+1}} + \dfrac{1}{L_{i-1}} \end{cases}$$

を調べると，$X_i = L_i M_{i+1}$， $Y_i = M_i L_{i+1}$ に対して次式が成立つ。

$$\begin{cases} \dot{X}_i = (Y_{i-1} + Y_{i+1} - 2X_i) X_i \\ \dot{Y}_i = -(X_{i-1} + X_{i+1} - 2Y_i) Y_i \end{cases}$$

次に二元のL方程式

$$\begin{cases} \dot{L}_i = \dfrac{1}{M_{i+1}} + \dfrac{1}{M_{i-1}} \\ \dot{M}_i = \dfrac{1}{L_{i+1}} + \dfrac{1}{L_{i-1}} \end{cases}$$

に対して $Q_i = \dfrac{1}{M_i}$， $P_i = L_i$ と置くと

$$\begin{cases} P_i = Q_{i+1} - Q_{i-1} \\ \dot{Q}_i = -Q_i^2 \left(\dfrac{1}{P_{i+1}} - \dfrac{1}{P_{i-1}} \right) \end{cases}$$

が成立つ。

ここで $P_i = \xi_{i+1} - \xi_{i-1}$， $Q_i = \dot{\xi}_i$ と置くと第一式は恒等式となり，第二式より

$$\ddot{\xi}_i = \dot{\xi}_i^2 \left(\frac{1}{\xi_i - \xi_{i-2}} - \frac{1}{\xi_{i+2} - \xi_i} \right)$$

従って

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{\xi}_i}\right)=\frac{\xi_{i+2}+\xi_{i-2}-2\xi_i}{(\xi_i-\xi_{i-2})(\xi_i-\xi_{i+2})}$$

が成立つ。これをξ方程式と呼ぶ。

*) ξ方程式の特殊解①

$$\xi_i=C_1e^X+C_2\ :\quad X=\alpha i+\beta t$$

と置いて両辺を比較すると恒等式となるので，C_1，C_2，α，βは任意である。

②

$$\xi_i=\frac{C_2}{e^X+C_1}+C_3\quad :\quad X=\alpha i+\beta t$$

とおいて両辺を比較すると恒等式となるので，C_1，C_2，C_3，α，βは任意である。

(2) L方程式の原方程式

1) §§2−1(2) 1)−i) の方法による。

$L_i=w_{i+1}-w_{i-1}$ と置くと原方程式は

$$\dot{w}_i=\frac{1}{w_{i+1}-w_{i-1}}+C\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

以後$C=0$と置く。$m_i=w_iw_{i+1}$ と置くと次式が成立つ。

$$\dot{m}_i=\frac{m_{i+1}-m_{i-1}}{(m_i-m_{i-1})(m_{i+1}-m_i)}\cdot m_i$$

これをm方程式と呼ぶ。これは$m_i=f_i\cdot t$（f_i は時間によらない）の形の解をもつ。

又，Volterra式のN_iとの関係は

$$N_i=\frac{m_i}{m_i(m_{i+1}+m_{i-1}-m_i)-m_{i-1}m_{i+1}}$$

で与えられる。

次に形式的に$m_i=w_i(1-w_{i+1})$，$n_i=w_{i+1}(1-w_i)$ と置くと次式が成立つ。

$$\left\{\ \dot{m}_i=\frac{n_{i-1}-n_{i+1}}{(m_i-n_{i-1})(n_{i+1}-m_i)}\cdot m_i\right.$$

$$\dot{n}_i = \frac{m_{i-1} - m_{i+1}}{(n_i - m_{i-1})(m_{i+1} - n_i)} \cdot n_i$$

②式の解の様子を探るために類似の次式

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \dfrac{1}{w_{i+1} - w_{i-1}} \\ \dot{w}_i = \dfrac{2}{v_{i-1} - v_{i+1}} \end{cases}$$

を考えると，特殊解は $v_i = \pm (i^2 - 1)\sqrt{t}$, $w_i = \mp \dfrac{\sqrt{t}}{i}$ である。

2) m方程式の原方程式

m方程式は次のように書換えることによりその原方程式を求め得る。

$$\begin{cases} (Am_i + 2B + \dfrac{C}{m_i})\dot{m}_i = f_i + f_{i+1} \\ f_i = \dfrac{Am_i m_{i-1} + B(m_i + m_{i-1}) + C}{m_i - m_{i-1}} \end{cases}$$

$v_i = \dfrac{A}{2} m_i^2 + 2Bm_i + C\log|m_i|$ に対し $v_i = w_i + w_{i+1}$ と置くことにより原方程式は，

$$\dot{w}_i = \frac{Am_i m_{i-1} + B(m_i + m_{i-1}) + C}{m_i - m_{i-1}}$$

と求まる。次の場合 m_i の表式が簡単に求まる。

ⓐ $B = C = 0$，$A \neq 0$ の時，$m_i = \sqrt{\dfrac{2}{A}v_i}$

ⓑ $A = B = 0$，$C \neq 0$ の時，$m_i = \pm e^{\frac{v_i}{c}}$

ⓒ $A = C = 0$，$B \neq 0$ の時，$m_i = \dfrac{v_i}{2B}$

ⓐの場合 $h_i = \dfrac{2}{A} w_i$ と置くと h_i に対する式は

$$\dot{h}_i = 2\,\frac{\sqrt{(h_i + h_{i+1})(h_{i-1} + h_i)}}{\sqrt{h_i + h_{i+1}} - \sqrt{h_{i-1} + h_i}}$$

となる。これをh方程式と呼ぶ。

ⓑの場合 $w'_i = e\frac{w_i}{c}$ と置くと w'_i に対する式は

$$\dot{w}'_i = \frac{1}{w'_{i+1} - w'_{i-1}}$$

となる。

ⓒの場合 $Q_i = \frac{w_i}{B}$ と置くと Q_i に対する式は

$$\dot{Q}_i = \frac{Q_{i+1} + Q_{i-1} + 2Q_i}{Q_{i+1} - Q_{i-1}}$$

となる。これをQ方程式と呼ぶ。

*) Q方程式の特殊解

$Q_i = AX^2 + B : X = \alpha i + \beta t$ と置いて係数比較により未知数を求めると, α, βを任任意として

$$Q_i = \frac{1}{2\alpha\beta} X^2 - \frac{\alpha}{4\beta}$$ と求まる。

3) 1)-ii) の方法による。

$L_i = \ell_{i+1} - \ell_i$ と置く原方程式は

$$\dot{\ell}_i = \frac{1}{\ell_{i+1} - \ell_i} + \frac{1}{\ell_i - \ell_{i-1}} + C$$

$$= \frac{\ell_{i+1} - \ell_{i-1}}{(\ell_i - \ell_{i-1})(\ell_{i+1} - \ell_i)} + C$$

である。これをℓ方程式と呼ぶ。

4) ℓ方程式の原方程式

ℓ方程式は次のように書換えることによりその原方程式を求め得る。

$$\begin{cases} (A\ell_i^2 + 2B\ell_i + C)\dot{\ell}_i = f_i + f_{i+1} \\ f_i = \dfrac{A\ell_i \ell_{i-1} + B(\ell_i + \ell_{i-1}) + C}{\ell_i - \ell_{i-1}} \end{cases}$$

$v_i = \frac{A}{3}\ell_i^3 + B\ell_i^3 + C\ell_i$ に対し $v_i = w_i + w_{i+1}$

とおくことにより原方程式は，

$$\dot{w}_i = \frac{A\ell_i\ell_{i-1} + B(\ell_i + \ell_{i-1}) + C}{\ell_i - \ell_{i-1}}$$

と求まる。

次の場合 ℓ_i の表式が簡単に求まる。

ⓐ　$B = C = 0$，$A \neq 0$ の時，$\ell_i = \sqrt[3]{\frac{3}{A} v_i}$

ⓑ　$A = C = 0$，$B \neq 0$ の時，$\ell_i = \sqrt{\frac{v_i}{B}}$

ⓒ　$A = B = 0$，$C \neq 0$ の時，$\ell_i = \frac{v_i}{C}$

ⓐの場合　$H_i = \frac{3}{A} w_i$ とおくと H_i に対する式は，

$$\dot{H}_i = 3\ \frac{\sqrt[3]{(H_i + H_{i+1})(H_{i-1} + H_i)}}{\sqrt[3]{H_i + H_{i+1}} - \sqrt[3]{H_{i-1} + H_i}}$$

これを H' 方程式と呼ぶ。

ⓑの場合 $w'_i = \frac{w_i}{B}$ とおくと w'_i に対する式は

$$\dot{w}'_i = \frac{\sqrt{w'_i + w'_{i+1}} + \sqrt{w'_{i-1} + w'_i}}{\sqrt{w'_i + w'_{i+1}} - \sqrt{w'_{i-1} + w'_i}}$$

これを w' 方程式と呼ぶ。

ⓒの場合 $w'_i = \frac{w_i}{C}$ とおくと w'_i に対する式は

$$w'_i = \frac{1}{w'_{i+1} - w'_{i-1}}$$

と求まる。

5)　i)－iii) の方法による。

$L_i = \ell'_i + \ell'_{i+1}$　と置くと原方程式は

$$\dot{\ell}'_i = \frac{1}{\ell'_i + \ell'_{i+1}} - \frac{1}{\ell'_{i-1} + \ell'_i}$$

$$= \frac{\ell'_{i-1} - \ell'_{i+1}}{(\ell'_i + \ell'_{i-1})(\ell'_{i+1} + \ell'_i)}$$

である。これを ℓ'方程式と呼ぶ。

$\ell_{2i}=\ell'_{2i}$, $\ell_{2i+1}=-\ell'_{2i+1}$ という変換により ℓ'方程式は ℓ 方程式にかわる。

*) ℓ'方程式の特殊解

$$\ell'_i=\frac{\cos h\,X+B}{\cos h\,X+A}\ :\ X=\alpha i+\beta t$$

と置いて係数比較により未知数を求めると,

$$\begin{cases} A=\pm\cos h\dfrac{\alpha}{2} \\ B=\pm\left(\dfrac{2}{\cos h\frac{\alpha}{2}}-\cos h\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \beta=-\dfrac{1}{2}\sin h\,\alpha \end{cases}$$

を得る。

6) ℓ'方程式の原方程式　ℓ'方程式は, ⅰ) ⅱ) のように書換えることによりその原方程式を求め得る。

ⅰ)

$$\begin{cases} (A'\ell'^2_i-C)\dot{\ell}'_i=f_i-f_{i+1} \\ f_i=\dfrac{A\ell'_i\ell'_i+(f_i+f_{i+1})+C}{\ell'_i+\ell'_{i-1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell'_i\dot{\ell}'_i=f_i+f_{i+1} \\ f_i=\dfrac{1}{2}\dfrac{\ell'_{i-1}-\ell'_i}{\ell'_{i-1}+\ell'_i} \end{cases}$$

ⅰ) からは, $v_i=\frac{A}{3}\ell'^3_i-C\ell'_i$ に対し, $v_i=w_i-w_{i+1}$ と置くことにより原方程式が

$$\dot{w}_i=\frac{A\ell'_i\ell'_{i-1}+C}{\ell'_i+\ell'_{i-1}}$$

と求まる。次の場合 ℓ'_i の表式が簡単に求まる。

ⓐ　$C=0$, $A\neq 0$ の時 $\ell'_i=\sqrt[3]{\frac{3}{A}v_i}$ で $H'_i=\frac{3}{A}w_i$ と置くと H'_i に対して

$$\dot{H}_i' = \frac{\sqrt[3]{(H_i' - H_{i+1}')(H_{i-1}' - H_i')}}{\sqrt[3]{H_i' - H_{i+1}'} + \sqrt[3]{H_{i-1}' - H_i'}}$$

となる。これをH'方程式と呼ぶ。

ⓑ　$A=0$，$C\neq 0$の時　$\ell_i' = -\frac{v_i}{C}$で$w_i' = \frac{w_i}{C}$と置くとw_i'に対して

$$\dot{w}_i' = \frac{1}{w_{i+1}' - w_{i-1}'}$$　と求まる。

ii) からは $v_i = \frac{1}{2}\ell_i'^2$ に対し $v_i = w_i + w_{i+1}$ と置くことにより原方程式が

$$\dot{w}_i = \frac{1}{2}\frac{\ell_{i-1}' - \ell_i'}{\ell_{i-1}' + \ell_i'}$$　と求まる。

$W_i = 2w_i$ と置くとW_iに対する式は

$$\dot{W}i = \frac{\sqrt{W_{i-1} + W_i} - \sqrt{W_i + W_{i+1}}}{\sqrt{W_{i-1} + W_i} + \sqrt{W_i + W_{i+1}}}$$

これをW方程式と呼ぶ。

*)　W方程式の特殊解

$$W_i = \frac{C_1}{\mathrm{ch}X + 1} + 1 \quad : \quad X = \alpha i + \beta t$$

と置いて $\sqrt{\quad}$ の中が完全平方式になる為に

$$C_1 = -4\tanh^2\frac{\alpha}{2}$$

この時

$$\beta = -\frac{1}{4}\sinh\alpha$$

が成立てばよいことがわかる。

§§ 2−5　Cowan 方程式の原方程式と特殊解

(1)　Cowan 方程式　$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1})N_i(1 - N_i)$は，変換$N_i = \frac{1}{1 + ay_i}$によって

$$\frac{\dot{y}_i}{y_i}=\frac{1}{1+ay_{i+1}}-\frac{1}{1+ay_{i-1}}$$

となる。これをｙ方程式と呼ぶ。 $y_i=e^{v_i}$ と置くと

$$\dot{v}_i=\frac{1}{1+ae^{v_{i+1}}}-\frac{1}{1+ae^{v_{i-1}}}$$

(2) §§2−1(2)1)−ⅰ)の方法による。

$v_i=w_{i+1}-w_{i-1}$に対して原方程式は

$$\dot{w}_i=\frac{1}{1+ae^{v_i}}+C$$

$$=\frac{(1+C)e^{w_{i-1}}+Cae^{w_{i+1}}}{e^{w_{i-1}}+ae^{w_{i+1}}} \quad \cdots\cdots\cdots③$$

特に $C=-\dfrac{1}{2}$ の時

$$\dot{w}_i=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{w_{i-1}}-ae^{w_{i+1}}}{e^{w_{i-1}}+ae^{w_{i+2}}}$$

$e^{w_i}=V_i$ とおくと， $a=\pm 1$ に応じて

$$\dot{V}_i=\frac{1}{2}\cdot\frac{V_{i-1}\pm V_{i+1}}{V_{i-1}\pm V_{i+1}}\cdot V_i$$

これをＶ方程式と呼ぶ。これは変換 $V_i'=aV_i$， $V_i'=\dfrac{1}{V_i}$ に対し，同じ型の方程式となる。

又， $V_i=\dfrac{1+F_i}{1-F_i}$ と置くと， $a=+1$ からは

$$\dot{F}_i=\frac{1}{4}\cdot\frac{F_{i-1}-F_{i+1}}{1-F_{i-1}F_{i+1}}(1-F_i^2) \quad \cdots\cdots\cdots④$$

$a=-1$ からは

$$\dot{F}_i=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-F_{i-1}F_{i+1}}{F_{i-1}-F_{i+1}}(1-F_i^2) \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

と変形される。これをF方程式と呼ぶ。

これは変換 $F_i' = \frac{1}{F_i}$ に対して同じ型の方程式となる。又 $a=+1$ の時，$N_i = \log V_i$ とすると，N_i に対して

$$\dot{N}_i = \frac{1}{2}\tanh\frac{1}{2}(N_{i-1} - N_{i+1})$$

が成立する。

*) 特殊解①③式の解

i) $e^{w_i} = Ae^X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて両辺を比較すると，

$$\beta = \frac{(1+C)e^{-\alpha} + Cae^{\alpha}}{e^{-\alpha} + ae^{\alpha}}, \quad A\text{は任意}$$

を得る。

ii) $e^{w_i} = AXe^X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて比較により

$\log a = 2(1+2C)$　の関係がある時

$2\beta = \alpha = 1+2C$，Aは任意　と求まる。

② V方程式の解（$a=+1$）

i) $V_i = A\,\mathrm{dn}\,X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて両辺を比較すると，

$$\beta = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{dn}\,\alpha}, \quad A\text{は任意}$$

を得る。$k\to 1$ の極限で

$$V_i \to \frac{A}{\cosh X}$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\tanh\alpha$$

を得る。

ii) $V_i = A\,\mathrm{sn}X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて比較により，

$$\beta = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}, \quad A\text{は任意}$$

を得る。$k\to 1$ の極限で

$$V_i = A\tanh X$$

$$\beta = -\frac{1}{4}\sinh 2\alpha$$

を得る。

iii) $V_i = A\,\mathrm{cn}\,X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて比較により，

$$\beta = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha}, \quad A\text{は任意}$$

を得る。 $k \to 1$ の極限で

$$V_i \to A \frac{1}{\cosh X}$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \tanh \alpha$$

を得る。

ⅳ) $V_i = \alpha i + \beta t$ と置いて比較により

$$\beta = -\frac{1}{2} \alpha$$

を得る。

③ F方程式の解　①②に対応した解として，例えば ⅰ) ④式からは

$$F_i = Ae^X : X = \alpha i + \beta t$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \sinh \alpha, \text{ Aは任意}$$

ⅱ) ④⑤式に対して

$$F_i = \tanh X, \quad X = \alpha i + \beta t$$

但し④式に対して $\beta = -\frac{1}{4} \tanh 2\alpha$

⑤式に対して $\beta = -\frac{1}{4} \cosh 2\alpha$

を直接確かめることが出来る。

(3) §§ 2−1 (2) 1)−ⅱ) の方法による。

1) $v_i = w_{i+1} - w_i$ と置くと原方程式は，

$$\dot{w}_i = \frac{1}{1 + ae^{v_i}} + \frac{1}{1 + ae^{v_{i-1}}} + C$$

$x_i = e^{w_i}$ とおくと

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \frac{x_i}{x_i + ax_{i+1}} + \frac{x_{i-1}}{x_{i-1} + ax_i} + C$$

特に $C = -1$ の時

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i-1} - a^2 x_{i+1}}{(x_i + a x_{i+1})(x_{i-1} + a x_i)} \cdot x_i^2$$

これを x 方程式と呼ぶ。

$a = \pm 1$ の時，形式的に

$$\begin{cases} L_i = \dfrac{1}{x_{i+1}} \pm \dfrac{1}{x_i} \\ M_i = x_i \pm x_{i+1} \end{cases}$$

と置くと次式が成立つ。

$$\begin{cases} \dot{L}_i = \dfrac{1}{M_{i-1}} - \dfrac{1}{M_{i+1}} \\ \dot{M}_i = \dfrac{1}{L_{i-1}} - \dfrac{1}{L_{i+1}} \end{cases}$$

$P_i = L_i$ ， $Q_i = \dfrac{1}{M_i}$ と置くと

$$\begin{cases} \dot{P}_i = Q_{i-1} - Q_{i+1} \\ \dot{Q}_i = Q_i^2 \left(\dfrac{1}{P_{i+1}} - \dfrac{1}{P_{i-1}} \right) \end{cases}$$

ここで $P_i = \xi_{i-1} - \xi_{i+1}$， $Q_i = \dot{\xi}_i$ と置くと第一式は恒等式となり， 第二式より

$$\ddot{\xi}_i = \dot{\xi}_i^2 \left(\frac{1}{\xi_i - \xi_{i+2}} - \frac{1}{\xi_{i-2} - \xi_i} \right)$$

従って

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{\xi}_i}\right) = \frac{\xi_{i+2} + \xi_{i-2} - 2\xi_i}{(\xi_i - \xi_{i-2})(\xi_i - \xi_{i+2})}$$

が成立つ。

又， $a = -1$ の時， $x_i = \dfrac{1+S_i}{1-S_i}$ と置くと， S_i に対して

$$\dot{S}_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{i-1} - S_{i+1}}{(S_i - S_{i+1})(S_{i-1} - S_i)} \cdot (1 - S_i^2)^2$$

を得る。これをS方程式と呼ぶ。

同様にして a＝＋1 の時　$x_i = \frac{1+S_i}{1-S_i}$　と置くと，S'_i に対して

$$\dot{S}'_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{S'_{i-1} - S'_{i+1}}{(1 - S'_i S'_{i+1})(1 - S'_i S'_{i-1})} \cdot (1 - S_i'^2)^2$$

を得る。これを S'方程式と呼ぶ。S，S'方程式は変換 $T = \frac{1}{S}$，$T' = \frac{1}{S'}$ に対して同じ型の方程式となる。

*) 特殊解①　x方程式の解

i) $x_i = e^X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置き両辺を比較すると，

$$\beta = -\frac{e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{a}\, e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{a}\, e^{-\frac{\alpha}{2}}}$$ ，A は任意

を得る。

ii) a＝＋1 の時，$x_i = A\cos X + B$：$X = \alpha i + \beta t$　と置いて未知数を求めると，A，α

αを任意として

$$B = \pm A\cosh\frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = -\tanh\frac{\alpha}{2}$$　を得る。

② S，S'方程式の解

①に対応して次式を得る。

$$\begin{cases} S_i = \pm\tanh X : X = \alpha i + \beta t \\ \beta = -\frac{1}{2}\cosh\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} S'_i = \pm\tanh X : X = \alpha i + \beta t \\ \beta = -\frac{1}{2}\tanh\alpha \end{cases}$$

x方程式の別の変形として，$M_{2i} = x_{2i}$，$M_{2i+1} = \frac{1}{x_{2i+1}}$ と置くと，a＝±1に従い次

式が成立つ。

$$\dot{M}_i = \frac{\pm (M_{i+1} - M_{i-1})}{(1 \pm M_i M_{i-1})(1 \pm M_i M_{i+1})} \cdot M_i^2$$

3) x方程式の原方程式

x方程式は i) ii) iii)のように書換えることにより，その原方程式を求め得る。

i) $a = +1$ の時

$$\begin{cases} \left(A - \dfrac{C}{x_i^2}\right) \dot{x}_i = f_i - f_{i+1} \\ f_i = \dfrac{A x_i x_{i-1} + B(x_i + x_{i-1}) + C}{x_i + x_{i-1}} \end{cases}$$

ii) $a = -1$ の時

$$\begin{cases} \left(A + \dfrac{2B}{x_i} + \dfrac{C}{x_i^2}\right) \dot{x}_i = f_i + f_{i+1} \\ f_i = -\dfrac{A x_i x_{i-1} + B(x_i + x_{i-1}) + C}{x_i - x_{i-1}} \end{cases}$$

iii) $a = +1$ の時

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}_i}{x_i} = f_i + f_{i+1} \\ f_i = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x_{i-1} - x_i}{x_{i-1} + x_i} \end{cases}$$

i) からは $v_i = A x_i + \dfrac{C}{x_i}$ に対し $v_i = Y_i - Y_{i+1}$ と置くことにより，原方程式が

$$\dot{Y}_i = \frac{A x_i x_{i-1} + C}{x_i + x_{i-1}} + B$$

と求まる。次の場合 x_i の表式が簡単に求まる。

ⓐ $A = 0$，$C \neq 0$ の時，$x_i = \dfrac{C}{v_i}$

ⓑ $A \neq 0$，$C = 0$ の時，$x_i = \dfrac{v_i}{A}$

ⓒ　A＝Cの時，　$v_i = A(x_i + \frac{1}{x_i})$

ⓓ　A＝−Cの時，　$v_i = A(x_i - \frac{1}{x_i})$

ⓐⓑの２つの場合 Y_i に対する式は

$$\dot{Y}_i = \frac{(Y_i - Y_{i-1})(Y_{i+1} - Y_i)}{Y_{i-1} - Y_{i+1}} + B$$

B＝０のものをＹ方程式と呼ぶ。

ⓒの場合原方程式は連立式で

$$\begin{cases} Y_i - Y_{i+1} = A(x_i + \frac{1}{x_i}) \\ \dot{Y}_i = A\frac{x_i x_{i-1} + 1}{x_i + x_{i-1}} \end{cases}$$

と書け，特殊解として

$$\begin{cases} x_i = e^X \quad (X = \alpha i + \beta t) \\ Y_i = -\frac{A}{\sinh\frac{h}{2}} \cdot \sinh(X - \frac{\alpha}{2}) \\ \beta = -\tanh\frac{h}{2} \end{cases}$$

が求まる。

ⓓの場合原方程式は

$$\begin{cases} Y_i - Y_{i+1} = A(x_i - \frac{1}{x_i}) \\ \dot{Y}_i = A\frac{x_i x_{i-1} - 1}{x_i + x_{i-1}} \end{cases}$$

と書け，特殊解として

$$\begin{cases} x_i = e^X \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_i = -\dfrac{A}{\sinh\dfrac{\alpha}{2}}\cosh\left(X-\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \beta = -\tanh\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

が求まる。

ii) からは $v_i = Ax_i - \dfrac{C}{x_i} + 2B\log x_i|$ に対し, $v_i = Y'_i + Y'_{i+1}$ と置くことにより原方程式が

$$\dot{Y}'_i = -\frac{Ax_i x_{i-1} + B(x_i + x_{i-1}) + C}{x_i - x_{i-1}}$$

と求まる。次の場合 x_i の表式が簡単に求まる。

ⓐ　$A=0$, $B=0$, $B\neq 0$ の時, $x_i = -\dfrac{C}{v_i}$

ⓑ　$A\neq 0$, $B=0$, $C=0$ の時, $x_i = \dfrac{v_i}{A}$

ⓒ　$A=0$, $B\neq 0$, $C=0$ の時, $x_i = \pm e^{\frac{v_i}{2B}}$

ⓓ　$A=C$, $B=0$ の時, $v_i = A\left(x_i - \dfrac{1}{x_i}\right)$

ⓔ　$A=-C$, $B=0$ の時, $v_i = A\left(x_i + \dfrac{1}{x_i}\right)$

ⓐⓑの2つの場合 Y'_i に対する式は

$$\dot{Y}'_i = \frac{(Y'_i + Y'_{i-1})(Y'_{i+1} + Y'_i)}{Y'_{i-1} - Y'_{i+1}}$$

これを Y'方程式と呼ぶ。これは変換 $Y_{2i} = Y'_{2i}$, $Y_{2i+1} = Y'_{2i+1}$ によって Y方程式にかわる。

ⓒの場合, $V_i = e^{\frac{Y'_i}{2B}}$ と置くと V_i に対する方程式は $a=-1$ の時の V方程式

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2}\,\frac{V_{i-1} + V_{i+1}}{V_{i-1} - V_{i+1}}$$

である。

ⓓの場合原方程式は連立式で

$$\begin{cases} Y'_i + Y'_{i+1} = A\left(x_i - \dfrac{1}{x_i}\right) \\ \dot{Y}'_i = -A\,\dfrac{x_i x_{i-1} + 1}{x_i - x_{i-1}} \end{cases}$$

と書け，特殊解として

$$\begin{cases} x_i = e^X \qquad (X = \alpha i + \beta t) \\ Y'_i = \dfrac{A}{\cosh\dfrac{\alpha}{2}} \sinh\left(X - \dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \beta = -\coth\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

が求まる。

ⓔの場合原方程式は連立式で

$$\begin{cases} Y'_i + Y'_{i+1} = A\left(x_i + \dfrac{1}{x_i}\right) \\ \dot{Y}'_i = -A\,\dfrac{x_i x_{i-1} - 1}{x_i - x_{i-1}} \end{cases}$$

と書け，特殊解として

$$\begin{cases} x_i = e^X \qquad (X = \alpha i + \beta t) \\ Y'_i = \dfrac{A}{\cosh\dfrac{\alpha}{2}} \cosh\left(X - \dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \beta = -\coth\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

を得る。

4) Y方程式及びY'方程式について

i) Y, Y'方程式は次の三つの変換ⓐ $X_i = aY_i$，$X'_i = aY'_i$，ⓑ $X_i = Y_i + C$，ⓒ $X_i = \dfrac{1}{Y_i}$，$X'_i = \dfrac{1}{Y'_i}$に対して同じ型の方程式となる。

*) Y, Y′方程式の特殊解

① $Y_i = Ae^X$: $X = \alpha i + \beta t$ と置いて両辺を比較すると,

$$\beta = -\tanh\frac{\alpha}{2},\quad A\text{は任意}$$

が求まる。

② $Y_i' = Ae^X$: $X = \alpha i + \beta t$ と置いて両辺を比較すると,

$$\beta = -\coth\frac{\alpha}{2},\quad A\text{は任意}$$

が求まる。

ii) Y, Y′方程式の変形

ⓐ $Z_{2i} = Y_{2i}$, $Z_{2i+1} = \dfrac{1}{Y_{2i+1}}$ と置くと,

$$\dot{Z}_i = \frac{(1 - Z_i Z_{i-1})(1 - Z_i Z_{i+1})}{(Z_{i-1} - Z_{i+1})}$$

が成立する。これをZ方程式と呼ぶ。

ⓑ $Z_{2i}' = Y_{2i}$, $Z_{2i+1}' = \dfrac{1}{Y_{2i+1}'}$ と置くと,

$$\dot{Z}_i' = -\frac{(1 + Z_i' Z_{i-1}')(1 + Z_i' Z_{i+1}')}{(Z_{i-1}' - Z_{i+1}')}$$

が成立する。これをZ′方程式と呼ぶ。

ⓒ $v_i = \dfrac{Y_{i-1}}{Y_{i-1} - Y_i}$ 又は $\dfrac{Y_{i-1}'}{Y_{i-1}' + Y_i'}$ と置くと

$$\dot{v}_i = \frac{(v_{i+1} - v_{i-1})\, v_i\, (1 - v_i)}{(1 - v_i - v_{i-1})(1 - v_i - v_{i+1})}$$

が成立する。これをv方程式と呼ぶ。

5) Z方程式及びZ′方程式について

i) Z, Z′方程式は変換 $X_i = \dfrac{1}{Z_i}$, $X_i' = \dfrac{1}{Z_i'}$ に対して同じ型の方程式となる。Z′方程式は変換 $X_i = \dfrac{1 + Z_i'}{1 - Z_i'}$ に対して同じ型の方程式となるが, Z方程式は変換 $Y_i' = \dfrac{1 + Z_i}{1 - Z_i}$ を行うと, Y_i'に対してY′方程式が成立する。

＊）Z方程式の特殊解

$Z_i = \tanh X$：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて両辺を比較すると

$$\beta = -\frac{1}{2}\coth\alpha$$

を得る。

ⅱ）Z，Z′方程式の変形。Z，Z′方程式に対して各々 $p_i = \dfrac{1}{1 - Z_i Z_{i+1}}$ 及び $p_i = \dfrac{1}{1 + Z_i' Z_{i+1}'}$ と置くと，p_i に対して次式を得る。

$$\dot{p}_i = \frac{(p_{i+1} - p_{i-1})}{(p_i - p_{i-1})(p_{i+1} - p_i)} \cdot p_i(1 - p_i)$$

これを p方程式と呼ぶ。

6） v方程式について

ⅰ）v方程式は変換 $v_i' = 1 - v_i$ に対して同じ型の方程式となる。又，$y_i = \dfrac{v_{i+2}}{v_{i+1} - 1}$ 又は $\dfrac{v_{i+1} - 1}{v_{i+2}}$ によって $a = +1$ の時の y方程式が得られる。

＊）v方程式の特殊解

$$v_i = C_1 \cosh X + C_2 \text{：} X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数比較により未知数を求めると，C_1，αを任意として，

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\coth^2\dfrac{\alpha}{2} + 4C_1^2\cosh^2\dfrac{\alpha}{2}}\right) \\ \beta = -\tanh\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

を得る。

ⅱ）$v_i = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}w_i$ と置くと次式を得る。

$$\dot{w}_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{(w_i + w_{i-1})(w_i + w_{i+1})} \cdot (1 - w_i^2)$$

これを w方程式とよぶ。変換 $p_{2i} = \dfrac{1}{2}(1 - w_{2i})$，$p_{2i+1} = \dfrac{1}{2}(1 + w_{2i+1})$ により p_i に対して p方程式が成立つ。w方程式は@ⓑのように書き換えることによりその原方程式を求め得る。

ⓐ
$$\begin{cases} \dfrac{C-Aw_i^2}{1-w_i^2}\cdot\dot{w}_i = f_i - f_{i+1} \\ f_i = \dfrac{Aw_i\, w_{i-1} + B(w_i + w_{i-1}) + C}{w_i + w_{i-1}} \end{cases}$$

ⓑ
$$\begin{cases} \dfrac{2w_i}{w_i^2-1}\,\dot{w}_i = f_i + f_{i+1} \\ f_i = -\dfrac{w_i - w_{i-1}}{w_i + w_{i-1}} \end{cases}$$

ⓐからは $v_i = Aw_i + \dfrac{C-A}{2}\log\left|\dfrac{1+w_i}{1-w_i}\right|$ に対し, $v_i = \eta_i - \eta_{i+1}$ と置くことにより, 原方程式が

$$\dot{\eta}_i = \frac{Aw_i\, w_{i-1} + B(w_i + w_{i-1}) + C}{w_i + w_{i-1}}$$

と求まる。次の２つの場合, w_i の表式が簡単になる。

㋑　$C = A$ の時, $w_i = \dfrac{v_i}{A}$

㋺　$A = 0$ の時, $w_i = \dfrac{\pm e^{\frac{2v_i}{c}} - 1}{\pm e^{\frac{2v_i}{c}} + 1}$

㋑の場合, η_i に対する式は

$$\dot{\eta}_i = \frac{(\eta_i - \eta_{i-1})(\eta_{i+1} - \eta_i) + A^2}{\eta_{i-1} - \eta_{i+1}} + B$$

となる。

㋺の場合複号の⊕に対して $Y_i' = e^{\frac{2}{c}\eta_i}$ と置くと,

$$\dot{Y}_i' = \frac{(Y_{i-1}' + Y_i')(Y_i' + Y_{i+1}')}{Y_{i-1}' - Y_{i+1}'} + \frac{2B}{C}\,Y_i'$$

となり, 複号の⊖に対して $Y_i = e^{\frac{2}{c}\eta_i}$ と置くと

$$\dot{Y}_i = \frac{(Y_{i-1} - Y_i)(Y_i - Y_{i+1})}{Y_{i-1} - Y_{i+1}} + \frac{2B}{C}\,Y_i$$

となる。

ⓑからは $w_i = \triangle \sqrt{1 \pm e^{v_i}}$ に対して $v_i = \eta_i + \eta_{i+1}$ と置くと方程式が

$$\dot{\eta}_i = -\frac{w_i - w_{i-1}}{w_i + w_{i-1}}$$ と求まる。

$u_i = e^{\eta_i}$ と置くと u_i に対して次式が成立つ。

$$\dot{u}_i = \frac{\sqrt{1 \pm u_i u_{i-1}} - \sqrt{1 \pm u_i u_{i+1}}}{\sqrt{1 \pm u_i u_{i-1}} + \sqrt{1 \pm u_i u_{i+1}}} \cdot u_i$$

これを u 方程式と呼ぶ。

7） p方程式について

i） p方程式は変換 $y_{2i} = \pm \frac{p_{2i+1}}{p_{2i}}, y_{2i-1} = \pm \frac{1-p_{2i}}{1-p_{2i-1}}$ を行うと y_i に対して y方程式が成立する。又変換 $T_i = \frac{p_{i-1}}{p_{i+1}}$ によって

$$\dot{T}_i = \frac{1}{2} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{(T_{i-1} - T_i)(T_i - T_{i+1})} \cdot T_i(1-T_i) \cdot (1-T_i^2)$$

に変る。これを T 方程式と呼ぶ。

*） p方程式の特殊解

$$p_i = A\cosh X + B \quad : X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数比較により未知数を求めると

$$\begin{cases} p_i = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\cosh X}{\cosh \frac{\alpha}{2}}\right) \\ \beta = -\cosh \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

が求まる。

ii） p方程式の原方程式。 p方程式は次のように書き換えることによりその原方程式を求め得る。

$$\left[\frac{A p_i^2 + 2B p_i + C}{p_i(1-p_i)} \cdot p_i = f_i + f_{i+1} \right.$$

$$\left.\quad f_i = \frac{A p_i p_{i-1} + B(p_i + p_{i-1}) + C}{p_i - p_{i-1}}\right\rfloor$$

$v_i = -A p_i + \log \dfrac{|p_i|^C}{|1-p_i|^{A+2B+C}}$ に対し

$v_i = w_i + w_{i+1}$ と置くことにより，原方程式が

$$\dot{w}_i = \frac{A p_i p_{i-1} + B(p_i + p_{i-1}) + C}{p_i - p_{i-1}}$$

と求まる。次の２つの場合 p_i の表式が簡単となる。

ⓐ　A＝０，B＝０，C≠０の時，$p_i = \dfrac{\oplus\, e^{\frac{v_i}{c}}}{1 \oplus e^{\frac{v_i}{c}}}$

ⓑ　A＝０，B≠０，C＝０の時，$p_i = 1 \oplus e^{-\frac{v_i}{2B}}$

ⓐの場合複号の⊕に対して $z'_i = e^{\frac{w_i}{c}}$ と置くと z'_i に対して z' 方程式が成立する。複号の⊖に対して $z_i = e^{\frac{w_i}{c}}$ と置くと z_i に対して z 方程式が成立する。

ⓑの場合 $U_i = e^{-wi/2B}$ に対して次式が成立つ。

$$\frac{\dot{U}_i}{U_i} = \frac{1}{2}\,\frac{U_{i-1} + U_{i+1} \ominus \frac{2}{U_i}}{U_{i-1} - U_{i+1}}$$

これをU方程式と呼ぶ。

*)　U方程式の特殊解①複号の⊕をとった時 $U_i = A\sinh X$ ：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて比較により

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{\cosh\alpha}}\ ,\quad \beta = -\frac{1}{2}\coth\alpha \quad \text{を得る。}$$

②　複号の⊖をとった時

$U_i = A\cosh X$ ：$X = \alpha i + \beta t$ と置いて比較により

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{\cosh\alpha}}\ ,\quad \beta = -\frac{1}{2}\coth\frac{\alpha}{2} \quad \text{を得る。}$$

8)　u方程式について

u方程式は次のように変形できる。

$$\frac{1}{u_i - i\dot{u}_i} - \frac{1}{u_i + i\dot{u}_i} = i\frac{\oplus(u_{i-1} - u_{i+1})}{2\oplus u_i(u_{i-1} + u_{i+1})} \qquad (\text{i は虚数単位})$$

*)　u方程式の特殊解（複号の⊕をとった時）

$u_i = C_1\cosh X + C_2$：$X = \alpha i + \beta t$ と置き $\sqrt{}$ の中が完全平方式になることを条件として用いて未知数を求めると，C_1，α を任意として次のように求まる。

$$\begin{cases} u_i = C_1\cosh X \pm \sqrt{C_1^2 + \dfrac{1}{\sinh^2\dfrac{\alpha}{2}}} \\ \beta = -\tanh\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

(4)　§§2−1．(2) 1)−iii) の方法による。

1)　$v_i = w_i + w_{i+1}$ と置くと原方程式は，

$$\dot{w}_i = \frac{1}{1 + ae^{v_i}} - \frac{1}{1 + ae^{v_{i-1}}}$$

$$= \frac{a(e^{w_{i-1}} - e^{w_{i+1}})e^{w_i}}{(1 + ae^{w_i + w_{i+1}})(1 + ae^{w_{i-1} + w_i})}$$

$M_i = e^{w_i}$ と置くと

$$\dot{M}_i = \frac{a(M_{i-1} - M_{i+1})M_i^2}{(1 + aM_iM_{i+1})(aM_iM_{i-1})}$$

これをM方程式と呼ぶ。変換 $L_i = M_i + \dfrac{1}{aM_{i-1}}$ 又は $L_i = M_i + \dfrac{1}{aM_{i+1}}$ を行うと L_i に対して次の形のL方程式が成立つ。

$$\dot{L}_i = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{L_{i+1}} - \frac{1}{L_{i-1}}\right)$$

*) M方程式の特殊解① $a = +1$ の時

$$M_i = A\frac{\cosh X + B}{\cosh X + C} \quad ： X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数を比較すると，次の４つの条件が成立てばよいことがわかる。

$$\begin{cases} B^2+C^2-2BC\cosh\alpha+\sinh^2\alpha=0 \cdots\cdots\cdots ⓐ \\ \dfrac{2\sinh\alpha}{(A+\frac{1}{A})^2}=-\beta \cdots\cdots\cdots ⓑ \\ \dfrac{1}{(A+\frac{1}{A})^2}\{2(B+C)\cosh\alpha+\frac{1}{A^2}(2C\cosh\alpha-B+C)+A^2(2B\cosh\alpha-C+B)\} \\ \qquad =B+C \cdots\cdots\cdots ⓒ \\ \dfrac{1}{(A+\frac{1}{A})^2}\{2(\sinh^2\alpha+BC)+\frac{C}{A^2}(2C\cosh\alpha-B)+A^2B(2B\cosh\alpha-C)\} \\ \qquad =BC \cdots\cdots\cdots ⓓ \end{cases}$$

ⓒより $C=\dfrac{A^2\cosh\alpha-1}{A^2-\cosh\alpha}\cdot B$ 又は $B=\dfrac{A^2-\cosh\alpha}{A^2\cosh\alpha-1}\cdot C \cdots\cdots\cdots ⓔ$

ⓔをⓐ に代入して

$$B^2=\frac{(A^2-\cosh\alpha)^2/A^2}{(A^2+\frac{1}{A^2})-2\cosh\alpha}, \quad C^2=\frac{(A^2\cosh\alpha-1)^2/A^2}{(A^2+\frac{1}{A^2})-2\cosh\alpha} \cdots\cdots\cdots ⓕ$$

ⓕより

$$BC=\pm\frac{(A^2-\cosh\alpha)(A^2\cosh\alpha-1)}{A^4-2\cosh\alpha\cdot A^2+1} \cdots\cdots\cdots ⓖ$$

ⓕⓖをⓓに代入すると，Aに関する方程式が導かれる。

i）ⓖで複号の⊕を入れた時恒等式となる。従って α，β を任意に選んでよく，この時Aはⓑより

$$A^2=\frac{1}{\beta}\{-(\beta+\sinh\alpha)\pm\sqrt{\sinh\alpha(2\beta+\sinh\alpha)}\}$$

と定まり，これをⓕに代入してB, Cを得る。

ii）ⓖで複号の⊖を入れた時，次の形式解がある。

①
$$\begin{cases} A=\pm\sqrt{\cosh\alpha} \\ B=0,\quad C=\pm i\sinh\alpha \\ \beta=-\tanh\dfrac{\alpha}{2}(1+\tanh^2\dfrac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} A = \text{㊤}\dfrac{1}{\sqrt{\cosh\alpha}} \\ B = \text{㊉}\, i\sinh\alpha\,, \qquad C = 0 \\ \beta = -\tanh\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\tanh^2\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} A = \text{㊤}\sqrt{i} \\ B^2 = 1\,\text{㊉}\,\dfrac{\sinh^2\alpha}{2\,i\cosh\alpha}\,, \qquad C^2 = 1\,\text{㊉}\,\dfrac{\sinh^2\alpha}{2\,i\cosh\alpha} \\ \beta = -\sinh\alpha \end{cases}$$

ここに i は虚数単位。

② $a = \pm 1$ の時

$$M_i = \frac{A\,\mathrm{dn}X + b}{\mathrm{dn}X + Ac} \quad : X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数を比較すると， $a = \text{㊉}1$ に応じて次の４つの条件が成立てばよいことがわかる。

$$\begin{cases} (b^2 - A^2)\left(c^2 - \dfrac{1}{A^2}\right)\mathrm{cn}^2\alpha = (bc - \mathrm{dn}\,\alpha)^2 \cdots\cdots\cdots ⓐ \\ \beta = \dfrac{\mp 2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha}{(c \pm b)^2\,\mathrm{sn}^2\alpha + \left(A \pm \dfrac{1}{A}\right)^2\mathrm{cn}^2\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots ⓑ \\ bc(b \pm c)\,\mathrm{sn}^2\alpha + (A^2\,\mathrm{cn}^2\alpha \pm \mathrm{dn}\,\alpha)\,c \pm \left(\dfrac{1}{A^2}\,\mathrm{cn}^2\alpha \mp \mathrm{dn}\,\alpha\right) b = 0 \cdots\cdots\cdots ⓒ \\ bc(b^2 + c^2)\,\mathrm{sn}^2\alpha - (b^2 + c^2)\,\mathrm{dn}\,\alpha + \left(A^2 + \dfrac{1}{A^2}\right) bc\,\mathrm{cn}^2\alpha \\ \qquad \pm (b^2c^2\,\mathrm{sn}^2\alpha + \mathrm{cn}^2\alpha - \mathrm{dn}^2\alpha) = 0 \cdots\cdots\cdots ⓓ \end{cases}$$

2) M方程式の原方程式。M方程式は ⅰ) ⅱ)のように書換えることにより，その原方程式を求め得る。

ⅰ)

$$\int \left(A + \frac{B}{M_i} - \frac{A}{aM_i^2}\right)\dot{M}_i = f_{i+1} - f_i$$

$$f_i = \frac{A(M_i + M_{i-1}) + B}{1 + aM_i M_{i-1}} + C$$

ii)

$$\begin{cases} -\left(1 + \dfrac{1}{aM_i^2}\right)\dot{M}_i = f_i + f_{i+1} \\ f_i = \dfrac{M_i - M_{i-1}}{1 + aM_i M_{i-1}} \end{cases}$$

i) からは $v_i = A\left(M_i + \dfrac{1}{aM_i}\right) + B\log|M_i|$ に対し　$v_i = w_{i+1} - w_i$ と置くことにより，原方程式は

$$\dot{w}_i = \frac{A(M_i + M_{i-1}) + B}{1 + aM_i M_{i-1}} + C$$

と求まる。$A = 0$ の時 M_i の表式は $M_i = \pm e^{\frac{v_i}{B}}$ となり，$V_i = e^{\frac{w_i}{B}}$ とおくと

$$\dot{V}_i = \frac{\left(1 + \frac{C}{B}\right)V_{i-1} + \frac{C}{B}aV_{i+1}}{V_{i-1} + aV_{i+1}} \cdot V_i$$

特に $C = -\dfrac{B}{2}$ の時 V_i に対し V方程式となる。

ii) からは $v_i = \dfrac{1}{aM_i} - M_i$ に対し $v_i = w_i + w_{i+1}$　と置くことにより，連立の原方程式

$$\begin{cases} w_i + w_{i+1} = \dfrac{1}{aM_i} - M_i \\ \dot{w}_i = \dfrac{M_i - M_{i-1}}{1 + aM_i M_{i-1}} \end{cases}$$

を得る。これを単にM方程式の原方程式と呼ぶ。

*) M方程式の原方程式の特殊解（ $a = +1$ の時 ）

$M_i = \dfrac{1 - X_i}{1 + X_i}$　と置くと次の連立式を得る。

$$\begin{cases} w_i + w_{i+1} = \dfrac{4X_i}{1 - X_i^2} \\ \dot{w}_i = \dfrac{X_{i-1} - X_i}{1 + X_i X_{i-1}} \end{cases}$$

X_i に次のような形を仮定し，未知数を定める。

1）$X_i = A\,\mathrm{sn}(X+\frac{\alpha}{2})$ ：$X = \alpha i + \beta t$

$w_i = B\,\mathrm{sn}X$

とおくと

$$\begin{cases} A = \pm k\,\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} \\ B = \pm 2k\,\dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}} \\ \beta = -\dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

$k \to 1$ で

$X_i \to A\tanh(X+\frac{1}{2})$，$w_i \to B\tanh X$

$$\begin{cases} A = \pm\tanh\frac{\alpha}{2} \\ B = \pm\sinh\alpha \\ \beta = -\frac{1}{2}\tanh\alpha\cosh\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

2）$X_i = A\,\mathrm{cn}(X+\frac{\alpha}{2})$ ：$X = \alpha i + \beta t$

$w_i = B\,\mathrm{cn}X$

とおくと

$$\begin{cases} A = \pm i\,k\,\dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}} \\ B = \pm 2ik\,\dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}} \\ \beta = -\dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{1}{1-k^2\,\dfrac{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{dn}^2\frac{\alpha}{2}}} \end{cases}$$

$k \to 1$ で

$$X_i \to \frac{A}{\cosh\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad w_i \to \frac{B}{\cosh X}$$

$$\begin{cases} A = \textcircled{\pm} i \sinh\frac{\alpha}{2} \\ B = \textcircled{\pm} 2 i \tanh\frac{\alpha}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2}\sinh\alpha \end{cases}$$

3) $\begin{cases} X_i = A\,\mathrm{dn}\left(X+\frac{\alpha}{2}\right) : X = \alpha i + \beta t \\ w_i = B\,\mathrm{dn}\,X \end{cases}$

と置くと

$$\begin{cases} A = \textcircled{\pm} i \dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}} \\ B = \textcircled{\pm} 2 i \dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}} \\ \beta = -\dfrac{\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cn}\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cn}^2\frac{\alpha}{2}}} \end{cases}$$

$k \to 1$ で

$$X_i \to \frac{A}{\cosh\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad w_i \to \frac{B}{\cosh X}$$

$$\begin{cases} A = \textcircled{\pm} i \sinh\frac{\alpha}{2} \\ B = \textcircled{\pm} 2 i \tanh\frac{\alpha}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2}\sinh\alpha \end{cases}$$

ここに i は虚数単位

(5) §§2－1(2)2) の方法による。

この方法は直接Cowan 方程式に適用可能であるが，ここでは等価な方法としてy方程式への応用を論ずる。y方程式はⅰ）ⅲ）のように書換えることにより，その原方程式を求め得る。

ⅰ）
$$\begin{cases} \dfrac{(aB-A)\,y_i+(aC-B)}{ay_i(1+ay_i)}\cdot\dot{y}_i = f_{i+1}-f_i \\[2ex] f_i = \dfrac{Ay_i\,y_{i-1}+B(y_i+y_{i-1})+C}{(1+ay_i)(1+ay_{i-1})} \end{cases}$$

ⅱ）
$$\begin{cases} \dfrac{\dot{y}_i}{y_i} = f_i + f_{i+1} \\[2ex] f_i = \dfrac{-a(y_i-y_{i-1})}{(1+ay_i)(1+ay_{i-1})} \end{cases}$$

ⅰ）からは $v_i=(C-\frac{B}{a})\log|y_i|+\frac{1}{a}(2B-\frac{A}{a}-aC)\log|1+ay_i|$ に対し， $v_i=w_{i+1}-w_i$ と置くことにより原方程式が

$$\dot{w}_i = \frac{Ay_i\,y_{i-1}+B(y_i+y_{i-1})+C}{(1+ay_i)(1+ay_{i-1})}$$

と求まる。次の場合 y_i の表式が簡単となる。

ⓐ　$C=\frac{B}{a}$ の時　$y_i=\frac{1}{a}\left(\pm\exp\left(\frac{av_i}{B-\frac{A}{a}}\right)-1\right)$

ⓑ　$B=\frac{A}{a}$ の時　$y_i=\dfrac{\pm\exp\left(\frac{v_i}{C-\frac{A}{a^2}}\right)}{1\pm a\ \exp\left(\frac{v_i}{C-\frac{A}{a^2}}\right)}$

ⓒ　$C=\frac{1}{a}(2B-\frac{A}{a})$ の時　$y_i=\boxed{\pm}\exp\left(\frac{av_i}{B-\frac{A}{a}}\right)$

ⓐの場合　$K_i = e^{\frac{w_i}{B-\frac{A}{a}}}$ と置くと，

$$\dot{K}_i=-\frac{1}{K_{i+1}}(K_{i+1}\mp K_i)(K_i\mp K_{i-1})+\frac{aB}{aB-A}K_i \cdots\cdots\cdots ⑥$$

となる。これをK方程式と呼ぶ。

ⓑ の場合 $K_i = \exp\left(-\dfrac{w_i}{C-\frac{A}{a^2}}\right)$ と置くと，

$$\dot{K}_i = -\frac{1}{K_{i+1}}(K_{i+1} \triangle\!\!\!\!\pm aK_i)(K_i \triangle\!\!\!\!\pm aK_{i-1}) + \frac{A}{A-Ca^2}K_i \cdots\cdots\cdots ⑦$$

となる。⑥⑦式は $K_i = Ae^X$ ： $X = \alpha i + \beta t$ （ α, A は任意）の形の解をもつ

ⓒ の場合 $x_i = \exp\left(-\dfrac{aw_i}{B-\frac{A}{a}}\right)$ 　と置くと，

$$\dot{x}_i = \left(\frac{x_i}{x_i \boxed{\pm} ax_{i+1}} + \frac{x_{i-1}}{x_{i-1} \boxed{\pm} ax_i} + \frac{A}{aB-A}\right)x_i$$

特に $B=0$ と選ぶと x に対して x 方程式が成立つ。

ii) からは $v_i = \log|y_i|$ に対して $v_i = w_i + w_{i+1}$ と置き，$M_i = e^{w_i}$ とすると M_i に対する原方程式は

$$\dot{M}_i = \frac{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\pm\, a(M_{i-1}-M_{i+1})M_i^2}{(1 \bigcirc\!\!\!\!\!\!\pm\, aM_iM_{i-1})(1 \bigcirc\!\!\!\!\!\!\pm\, aM_iM_{i+1})} \quad となる$$

§§2−6 ランダム格子

ここでは§§2−1 の応用として初期条件によって定まる定数 C_i を含む方程式に還元できる4つの方程式を考察する。

(1)
$$\begin{cases} \dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})N_i^{\alpha} M_i M_{i-1} \\ \dot{M}_i = (N_{i+1} - N_i)M_i \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})N_i^{\alpha} \dfrac{M_i}{M_{i-1}} \\ \dot{M}_i = (N_{i+1} + N_i + d)M_i \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} \dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})N_i^{\alpha} \dfrac{M_{i+1}}{M_{i-1}} \\ \dot{M}_i = (N_i + d)M_i \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} \dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})N_i^{\alpha} \dfrac{M_i}{M_{i-1}} \\ \dot{M}_i = \{(N_i + B)(N_{i+1} + B) + A\}M_i \end{cases}$$

(2)の場合 $N_i^{-\alpha}\dot{N}_i=\frac{d}{dt}(M_iM_{i-1})$ が証明できる。従って

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})\left(\frac{1}{1-\alpha}N_i+C_iN_i^{\alpha}\right),\quad(\alpha\neq 1)$$

1) $\alpha=0$ の時

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})(N_i+C_i)$$

2) $\alpha=2$ の時

$$\dot{N}_i=(N_{i-1}-N_{i+1})N_i(1-C_iN_i)$$

(2)の場合 $N_i^{-\alpha}\dot{N}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{M_i}{M_{i-1}}\right)$ が証明できる。従って

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})\left(\frac{1}{1-\alpha}N_i+C_iN_i^{\alpha}\right),\quad(\alpha\neq 1)$$

1) $\alpha=0$ の時

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})(N_i+C_i)$$

2) $\alpha=2$ の時

$$\dot{N}_i=(N_{i-1}-N_{i+1})N_i(1-C_iN_i)$$

(3)の場合 $N_i^{-\alpha}\dot{N}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{M_{i+1}}{M_{i-1}}\right)$ が証明できる。従って

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})\left(\frac{1}{1-\alpha}N_i+C_iN_i^{\alpha}\right),\quad(\alpha\neq 1)$$

1) $\alpha=0$ の時

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})(N_i+C_i)$$

2) $\alpha=2$ の時

$$\dot{N}_i=(N_{i-1}-N_{i+1})N_i(1-C_iN_i)$$

(4)の場合 $N_i^{-\alpha}(N_i+B)\dot{N}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{M_i}{M_{i-1}}\right)$ が証明できる。従って

$$\dot{N}_i=(N_{i+1}-N_{i-1})\left(\frac{1}{2-\alpha}N_i^2+\frac{B}{1-\alpha}N_i+C_iN_i^{2}\right),\quad(\alpha\neq 1,2)$$

1) $\alpha=0$ の時

$$\dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})\left(\frac{1}{2}N_i^2 + BN_i + C_i\right)$$

2) $\alpha = 1$, $B = 0$の時

$$\dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})N_i(C_i + N_i)$$

§3 結合法

(1) 単純な多元化

これは単に元の微差分方程式の中に現われる変数をすりかえて多元連立式に変えたものであり，二元 Volterra 式などがこれに相当する。その他次のようなものがある。

1) 三元 Volterra式

$$\begin{cases} \dot{L}_i = (M_{i-1} - N_{i+1})L_i \\ \dot{M}_i = (N_{i-1} - L_{i+1})M_i \\ \dot{N}_i = (L_{i-1} - M_{i-1})N_i \end{cases}$$

変換 $v_i = \log M_i N_{i+1}$, $w_i = \log N_i L_{i+1}$, $x_i = \log L_i M_{i+1}$により，次式が成立する。

$$\begin{cases} \ddot{v}_i = e^{w_{i-2}} + e^{x_{i+2}} - 2e^{v_i} \\ \ddot{w}_i = e^{x_{i-2}} + e^{v_{i+2}} - 2e^{w_i} \\ \ddot{x}_i = e^{v_{i-2}} + e^{w_{i+2}} - 2e^{x_i} \end{cases}$$

2) 二元 Cowan方程式

$$\begin{cases} \dot{N}_i = (M_{i-1} - M_{i+1})N_i(1 - N_i) \\ \dot{M}_i = (N_{i-1} - N_{i+1})M_i(1 - M_i) \end{cases}$$

これは次のような特別の場合を含む。即ち

i) $M_i = N_i$ の時，一つの方程式

$$\dot{N}_i = (N_{i-1} - N_{i+1})N_i(1 - N_i) \text{ になる。}$$

ii) $M_i = 1 - N_i$ の時，一つの方程式

$$\dot{N}_i = (N_{i+1} - N_{i-1})N_i(1 - N_i) \text{ になる。}$$

(2)　一時的結合法

方程式Ⓐとその原方程式Ⓑ $\frac{\dot{X}_i}{X_i}=f_i$ に対し f_i が商 $\frac{X_i}{X_{i+2}}$ のみを含む時，これを $\frac{X_i}{Y_{i+1}}\cdot\frac{Y_{i+1}}{X_{i+2}}$ に書換え，$S_i=\frac{X_i}{Y_{i+1}}$，$T_i=\frac{Y_i}{X_{i+1}}$ と置くことにより，S_i，T_i に対する連立方程式を得るが，$N_i=S_i\,T_{i+1}$，$M_i=T_i\,S_{i+1}$ に対しては再び独立に方程式Ⓐが成立つ。例として次のようなものがある。

1)　X_i，Y_i に対して独立に

$$\begin{cases}\dot{X}_i=\left(\frac{X_{i-1}}{X_{i+1}}-1\right)X_i\\[2ex]\dot{Y}_i=\left(\frac{Y_{i-1}}{Y_{i+1}}-1\right)Y_i\end{cases}$$

が成立つ時，$S_i=\frac{X_i}{Y_{i+1}}\cdot\frac{Y_i}{X_{i+1}}$ に対しては

$$\begin{cases}\dot{S}_i=(S_{i-1}-S_{i+1})\,S_i\,T_i\\[2ex]\dot{T}_i=(T_{i-1}-T_{i+1})\,S_i\,T_i\end{cases}$$

が成立ち，$N_i=S_i\,T_{i+1}$，M_i a $T_i\,S_{i+1}$ に対してはそれぞれ独立に Volterra 式が成立つ。尚類似の次式

$$\begin{cases}\dot{S}_i=(T_{i-1}-T_{i+1})\,S_i\,T_i\\\dot{T}_i=(S_{i-1}-S_{i+1})\,S_i\,T_i\end{cases}$$

に対して $N_i=S_i\,S_{i+1}$，$M_i=T_i\,T_{i+1}$ とすると N_i，M_i に対しては二元 Volterra 式が成立つ。

2)　X_i，Y_i に対して独立に

$$\begin{cases}\frac{\dot{X}_i}{X_i}=\frac{X_{i-2}}{X_i}+\frac{X_i}{X_{i+2}}+C\\[2ex]\frac{\dot{Y}_i}{Y_i}=\frac{Y_{i-2}}{Y_i}+\frac{Y_i}{Y_{i+2}}+C\end{cases}$$

が成立つ時，$S_i=\frac{X_i}{Y_{i+1}}$，$T_i=\frac{Y_i}{X_{i+1}}$ に対しては，

$$\begin{cases}S_i=\{(S_{i-2}-S_i)\,T_{i-2}+(S_i-S_{i+2})\,T_{i+1}\}\,S_i\end{cases}$$

$$\dot{T}_i = \{(T_{i-2} - T_i) S_{i-1} + (T_i - T_{i+2}) S_{i+1}\} T_i$$

が成立ち， $N_i = S_i T_{i+1}$， $M_i = T_i S_{i+1}$ に対しては

$$\begin{cases} \dot{N}_i = (N_{i-2} - N_{i+2}) N_i \\ \dot{M}_i = (M_{i-2} - M_{i+2}) M_i \end{cases}$$

が成立つ。

3） X_i , Y_i に対して独立に

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{X}_i}{X_i} = \dfrac{1}{2} \dfrac{X_{i-1} - Y_{i+1}}{X_{i-1} + Y_{i+1}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + \dfrac{X_{i-1}}{X_{i+1}}} \\ \dfrac{\dot{Y}_i}{Y_i} = \dfrac{1}{2} \dfrac{Y_{i-1} - Y_{i+1}}{Y_{i-1} + Y_{i+1}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + \dfrac{Y_{i-1}}{Y_{i+1}}} \end{cases}$$

が成立つ時， $S_i = \dfrac{X_i}{Y_{i+1}}$， $T_i = \dfrac{Y_i}{X_{i+1}}$ に対して，

$$\begin{cases} \dot{S}_i = \dfrac{S_{i-1} - S_{i+1}}{(1 + T_i S_{i+1})(1 + T_i S_{i-1})} \cdot T_i S_i \\ \dot{T}_i = \dfrac{T_{i-1} - T_{i+1}}{(1 + S_i T_{i+1})(1 + S_i T_{i-1})} \cdot T_i S_i \end{cases}$$

が成立つ。これを２元M方程式と呼ぶ。この時， $x_i = S_i T_{i+1}$， $y_i = T_i S_{i+1}$ に対してはそれぞれ独立に y 方程式が成立つ。

4） 同様にして異種の方程式間の一時的結合も可能である。例えば Volterra式と Cowan式間又は変数の逆数をとった線型方程式と Volterra式間などがある。

(3) 内挿法

① ℓ' 方程式の拡張として次式を考える。

$$\begin{cases} \dot{\ell}_i = \dfrac{1}{\ell_i + \ell_{i+1} + C\dfrac{m_i n_i}{\ell_i}} - \dfrac{1}{\ell_i + \ell_{i-1} + C\dfrac{m_i n_i}{\ell_i}} \\ \dot{m}_i = \dfrac{1}{m_i + m_{i+1} + C\dfrac{n_i \ell_i}{m_i}} - \dfrac{1}{m_i + m_{i-1} + C\dfrac{n_i \ell_i}{m_i}} \end{cases}$$

$$\dot{n}_i = \frac{1}{n_i + n_{i+1} + C\dfrac{\ell_i m_i}{n_i}} - \frac{1}{n_i + n_{i-1} + C\dfrac{\ell_i m_i}{n_i}}$$

これを三元 ℓ' 方程式とよぶ。

1)　$\ell_i = 0$ の時 m_i ，n_i に対する方程式は独立な ℓ' 方程式に還元される。

2)　$\ell_i = m_i = n_i$ の時

i)　$C = -1$ に対しては，一つのL方程式に還元される。

ii)　$C = -2$ に対しては一つの ℓ 方程式に還元される。

iii)　$C \neq -1,\ -2$ の時，$\ell_i = A\cosh X$: $X = \alpha i + \beta t$ と置いて未知数を求めると次式が求まる。

$$\begin{cases} \alpha = \pm \log\{-(1+C)\} \\ A^2\beta = \pm \dfrac{4(C+1)}{C(C+2)} \end{cases}$$

② x方程式と線型方程式の内挿式

次式

$$-\frac{\dot{q}_i}{a^2 q_i^2 + b^2} = \frac{q_i - q_{i-1}}{a^2(q_i - q_{i-1})^2 + b^2} + \frac{q_{i+1} - q_i}{a^2(q_{i+1} - q_i)^2 + b^2}$$

を考えると

1)　$a = 0$ の時，$\dot{q}_i = q_{i-1} - q_{i+1}$

2)　$b = 0$ の時，$\dot{q}_i = \dfrac{(q_{i-1} - q_{i+1})}{(q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1})} \cdot q_i^2$

となる。これをq方程式とよぶ。

*) q方程式の特殊解

$$q_i = C_1 \operatorname{ch} X : X = \alpha i + \beta t$$

と置いて係数比較により未知数を定めると，

$$\begin{cases} C_1 = \pm \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{\sinh \alpha} \\ \beta = -\coth \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

を得る。

(4) 複号の一括

一般に運動方程式が

$$\dot{v} = \frac{f \mp g}{f \pm g}$$

と表わされている時

$$\dot{v} = \frac{f^2 - g^2}{2(g^2 + f^2) + (g^2 - f^2)\dot{v}}$$

が成立つことを利用して複号を消去し，一つの方程式にまとめることが出来る。例として次のようなものがある。

1) V方程式

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2} \frac{V_{i-1} \mp V_{i+1}}{V_{i-1} \pm V_i} \; V_i$$

は，$v_i = 2\log V_i$　$f = e^{\frac{v_{i-1}}{2}}$　$g = e^{\frac{v_{i+1}}{2}}$ によって上の形式となる。$W_i = e^{v_i}$ とおくと W_i に対して

$$\dot{W}_i = \frac{(W_{i-1} - W_{i+1}) W_i^2}{2(W_{i+1} + W_{i-1}) W_i + (W_{i+1} - W_{i-1}) \dot{W}_i}$$

が成り立つ。

2) u方程式を更に一般化した式

$$\dot{u}_i = \frac{\sqrt{1 \pm u_i u_{i-1}} \mp \sqrt{1 \pm u_i u_{i+1}}}{\sqrt{1 \pm u_i u_{i-1}} \pm \sqrt{1 \pm u_i u_{i+1}}} \cdot u_i$$

は $\eta_i = \log u_i$，$f = \sqrt{1 \pm e^{\eta_i + \eta_{i-1}}}$，$g = \sqrt{1 \pm e^{\eta_i + \eta_{i+1}}}$ によって上の形式となる。

この時次式が成立つ。

$$\dot{u}_i = \frac{\oplus(u_{i-1} - u_{i+1})\, u_i^2}{2(2 \oplus u_i(u_{i-1} + u_{i+1})) \oplus (u_{i+1} - u_{i-1})\, \dot{u}_i}$$

3) W方程式を一般化した式

$$\dot{W}_i = \frac{\sqrt{W_i + W_{i-1}} \ \mp\ \sqrt{W_i + W_{i+1}}}{\sqrt{W_i + W_{i-1}} \ \pm\ \sqrt{W_i + W_{i+1}}}$$

に於いて $f = \sqrt{W_i + W_{i-1}}$, $g = \sqrt{W_i + W_{i+1}}$ であるから

$$\dot{W}_i = \frac{W_{i-1} - W_{i+1}}{2(2W_i + W_{i+1} + W_{i-1}) + (W_{i+1} - W_{i+1} - W_{i-1})\dot{W}_i}$$

が成立つ。

（終）