$$p_0(x,t\mid x_0,0)=\frac{1}{1-e^{-\gamma t}}\exp\left[\frac{x+x_0}{1-e^{\gamma t}}\right]I_0\left(2\sqrt{\frac{xx_0e^{-\gamma t}}{1-e^{-\gamma t}}}\right)e^{-x}\quad\cdots(7)$$

I_0 は位数0の変形Bessel函数である。(7)式から平均値，分散の挙動を調べると

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_t&=1+(x_0-1)e^{-\gamma t}\\ \langle(\delta x)^2\rangle_t&=[1+(x_0-1)e^{-\gamma t}](1-e^{-\gamma t})\end{aligned}\quad\cdots(8)$$

となる。最後に臨界緩和は $v(k)=\text{const.}\equiv v$，$\beta\tilde{\varepsilon}_0=r$ として，$\gamma=Av^2r$（A は積分で表わされる数値）となり van Hove 理論に一致していることが分る。

参考文献

1) A. E. Glassgold and H. Sauermann, Phys. Rev. **182**, (1969), 262. **188**, (1969), 515.
2) J. S. Langer, Phys. Rev. **184**, (1969), 219.

レーザーにおける instability－undamped spiking－に対する stochastic model

東大・理　高河原　俊秀

レーザーの spiking oscillation は，レーザーの誕生と同時に観測され，実験条件により不規則（減衰，非減衰）発振になることが調べられた。ここでは特に非減衰発振（undamped spiking）について，非平衡非線型系における時間領域での対称性の低下（limit cycle の出現）という観点[1]より考察を加える。この現象は，電磁場と物質系との非線型相互作用に起因するが，これをごく簡単に説明すると次のようになる。まず電磁場はレーザー媒質からの自然放出により生じ，誘導放出過程を通じて反転分布を食い尽しつつ成長する。反転分布が減少して光子の供給が各種の損失に打勝てなくなると，電磁場は減衰してゆく。一方反転分布はたえずポンピングにより供給をうけているので，その間に回復し各種の損失に打勝つだけの光子を供給するようになり，再び電

磁場は成長し始める。これで cycle がとじるわけであるが，prey-predator process としてみるならば，反転分布を prey に，電磁場を predator にあてはめることができよう。上の過程をそのまま定式化したのが Statz - de Mars 方程式であるが，これは非減衰解をもちえないことが示されている[2]これは上の定式化の中に positive feedback の機構がないからである。これに関して Shimoda[3]は，cavity loss における飽和効果に基づいて定性的議論の範囲内で非減衰解の可能性を指摘した。数年後には炭酸ガスレーザーに，吸収気体などの Q - switching 素子を加えて repetitive pulsing をおこさせる実験がなされ[4]，理論的には Hofelich 達[5]が簡単なモデルで非減衰解（ limit cycle ）の存在を論じた。ここでは undamped spiking を，くりかえしQスイッチ発振として捉える立場から Hofelich 達のモデルを採用し，これを Ω- 展開[6]の手法で取扱う。我々のモデルは，lasing atom，可飽和吸収体，光子よりなり，電磁場は単一モードとする。レーザー媒質或いは可飽和吸収体の非線型性が著しい場合には，モード間相互作用が無視できなくなり，自己（或いは受動的）モード同期が起るが，ここではそのような現象は除外している。さらに Ω - 展開の方法を適用するために本質的な仮定をおく。それは，レーザー媒質，可飽和吸収体，光子が一様に分布しているという仮定である。言いかえると，空洞の形状，可飽和吸収体の置かれる位置などの境界条件を一切考えない。モード同期をはじめ種々の多モードの現象は，これらに敏感に依存しているのであるが，ここでは考察外とする。次に各素過程を説明するために，lasing atom は二準位とし，上（下）準位の占有数を N_2（N_1），反転分子（光子）の総数を S（N），各素過程での S（N）の変化を ΔS（ΔN），確率を $W(N, S\,;\,\Delta N, \Delta S)$ とする。

(1) 誘導放出（吸収）過程

$$W(N, S\,;\,1, -2) = BnN_2, \quad W(N, S\,;\,-1, 2) = BnN_1$$

ここで，Bは Einstein のB係数に相当し，n は光子の数密度である。

(2) lasing atom の緩和過程

$$W(N, S\,;\,0, -2) = \gamma N_2$$

緩和確率 γ は，固体（気体）レーザーでは，格子場（衝突）によるものである。

(3) ポンピング過程

$$W(N, S\,;\,0, 2) = \gamma p_0 N_1$$

p_0 はポンピングの強さを特徴づける。

(4) 可飽和吸収体による吸収過程

$W(N, S; -1, 0) = N_a B_a n / (1 + \delta n)$

B_a は可飽和吸収体に関するB係数。吸収体の緩和過程は十分速やかであって，電磁場に断熱的に追随するとした。したがって $N_a / (1 + \delta n)$ が瞬間での吸収体の上下準位の占有数の差をあらわす。

(5) cavity loss 過程

$W(N, S; -1, 0) = 2\mathcal{K}N$

$\mathcal{K}$ はたとえば回折損失をあらわす。

以上の5つの素過程をもとにして，Ω -展開法を適用する。結果をかいつまんで述べると，まずundamped spikingがおこるためには，ポンピングの強さはある範囲内 ($p_{0-} < p_0 < p_{0+}$) でなければならない。これは ref. 4) の Fig 1c) の実験結果を説明するものである。又 limit cycle が出現している時，光子数を x，反転分布を y, その分散を各々 σ_{xx}，σ_{yy} とすると，σ_{xx} は x の最大（小）値の近傍で極小となり，x が最大 ⇆ 最小の移行をする途中で一回だけ極大値をとる。σ_{yy} についても同様である。このことは，一変数の取扱いで不安定点から安定点に移行する際に分散に大きいピークがあらわれること[6]に類似していて興味深い。上記詳細については ref 7) を参照。

尚，研究会では，硬モード不安定化の閾値近傍での分散を系統的に求める方法についても述べた。[8]

参　考　文　献

1) K. Tomita and H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **51**, (1974), 1731.
K. Tomita, T. Ohta and H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **52**, (1974) No. 6.

2) see references cited in ref. 7)

3) K. Shimoda, in Proceedings of the Symposium on Optical Masers, ed. J. Fox (Polytechnic Press, New York 1963) p. 95.

4) P. L. Hanst et al., Appl. Phys. Letters **12**, (1968), 58.

5) E. Hofelich-Abate and F. Hofelich, J. Appl. Phys. **39**, (1968), 4823.

6) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9**, (1973), 51.

7) T. Takagahara, Prog. Theor. Phys. **53**, (1974) No. 2.
The full paper of this letter is in preparation.

8) T. Takagahara, Prog. Theor. Phys. **53**, (1975) No. 3.