非可逆循環 (Irreversible circulation) に関する二三の問題

京大・理　　富　田　和　久

我々の研究室での最近の仕事として 1) 非可逆循環と統計力学的波動関数, 2) 振動の post－ critical behaviour 3) Dephased limit cycle を導く変分原理, 4) Saturable absorption と Laser の Undamped Spiking 等をあげることができるが, ここでは, 主として 1), 2) について簡単な報告を行なう。

§ 1.　Irreversible Circulation and Statistial Wave Function

閉じた系の熱平衡近傍においては, 詳細釣合が存在することに基づいて, 揺動の分散 (variance) , すなわち時間的 1 点情報がわかれば, それだけで系の動的振舞が予測できるという特殊事情があるが, intrinsic な開放系の熱平衡から遠い状態の場合は, 揺動の動的振舞を推測するには, 分散に加えて, 本質的に時間の 2 点に関係した情報をあらかじめ知っている必要がある。この様な見地から我々は, 開放系特有の 2 点情報量として揺動の循環 (circulation) なる量を用いる提案を行った。①②③

分散と循環とがどちらも不可欠の情報であるとすれば, これを合せて含む 1 つの量が定義されれば, それだけ見通しがよくなると考えられる。そこで, ここではその一つの試みとして, 確率密度に関連した統計的波動関数 (複素確率振巾) を導入する。すなわち分布関数 P (η, t) に対して,

$$P(\eta, t) \equiv \Psi(\overset{*}{\eta}, t)\, \Psi(\eta, t), \tag{1}$$

$$\Psi(\eta, t) = \exp\{ \frac{1}{2} c(t) + \Omega\, \chi(\eta, t) \}, \tag{2}$$

$$\chi(\eta, t) = \phi(\eta, t) + i\psi(\eta, t) \tag{3}$$

によって, 統計的波動関数 $\Psi(\eta, t)$ を導入すれば, 時間的 1 点情報である $P(\eta, t)$ によっては一意的に表現することの出来ない循環を $\chi(\eta, t) \equiv \ln \Psi(\eta, t)$ の imaginary part に直接関連づけることが出来る。 この場合確率密度は統計的波動関数 $\Psi(\eta, t)$

の振巾によって表現され

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \dot{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \tag{4}$$

なる方程式に従がって変化し，循環は統計的波動関数の位相に関連づけられ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\dot{\sigma} - 2\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \tag{5}$$

なる方程式に従って変化する。特に steady state の場合には，ψ は分布の等高線の方向に向って流れていく性質をもつ。この事情は，磁場の下における Larmor precessionとよく似ているが，開放系における非可逆性の表現として特徴的な事実は，"磁場に相当する量" の反転が許されないことである。

§ 2. Post- critical behaviour of fluctuation**

非線型自律系としての系の永年運動 (secular motion) を解くことは，post - critical な領域ではそれ自体が一つの問題であり，reductive perturbation の応用がすでに報告されているが，次にこの答がえられている場合には，揺動に注目して線型非自律系としての分散 (variance) を解くことは，必らずしも難しくない。すなわち，controlable parameter p によって表現した臨界点からのずれ $\varepsilon \equiv \frac{p - p_c}{p_c}$ が小さいとして，内部矛盾を含まない摂動展開を行えば，次のような結果をうることが出来る。

今本質的特徴を失わぬ範囲で一番簡単な 2 自由度系 (x_1 , x_2) を考え，これが永年運動 $\underset{\sim}{y}(t)$ と揺動 $\underset{\sim}{\eta} \equiv \sqrt{\Omega}\, \underset{\sim}{\xi}$ の和として表わされるとする。このとき秩序相は

$$\frac{d\underset{\sim}{y}}{dt} = \underset{\sim}{C}_1 (\underset{\sim}{y}(t))$$

なる運動方程式に従がうが，臨界点の ε 近傍であるという事実を用いて展開すれば，秩序パラメーターとしての角運動量 $\underset{\sim}{A} \equiv \frac{1}{2} [\underset{\sim}{y}(t), \dot{\underset{\sim}{y}}(t)]$ は regression matrix $\boldsymbol{K} \equiv \frac{\partial \underset{\sim}{C}_1(y)}{\partial \underset{\sim}{y}}$ を用いて

$$A \simeq - \frac{\varepsilon^2 r_1^2}{2} \frac{\triangle_0}{K_{12}^{(0)}}$$

のごとく書かれる。ここに $\triangle \equiv \det \boldsymbol{K}$, K_{12} は行列 $\boldsymbol{K}$ の (1, 2) 成分を表わし，添字 0 は ε 展開の最低次 (0 次) の項を意味している。また，軌道の半径は εr_1 で与えられるとし

ている。次に揺動を論ずる。この場合は，（ξ_1，ξ_2）→（r，s）によって軌道に⊥の方角rと∥の方向sとに座標をえらびかえるのが便利である。この座標系における分散 σ'_{rr} は

$$\sigma'_{rr}(t) \simeq \frac{C_{rr}}{\varepsilon^2[\dot{y}(t)]^2} \ ;$$

で与えられ，ここに

$$C_{rr} \simeq \frac{1}{2\,t_r K^{(2)}} \overline{[\dot{y}(t)]^2 D^{(0)}_{rr}(t)}$$

ただし，D は dephasing の行列，$\overline{Q} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)\,dt$ （T＝1周期）
1周期Tにわたっての時間平均をあらわす。 σ'_{rr} 自体の1周期平均は

$$\overline{\sigma'_{rr}} \simeq \frac{C_{rr}}{\varepsilon^2} \frac{K^{(0)}_{12}}{\triangle_0^{3/2}}$$

で与えられる。

同様にして

$$\sigma'_{rs}(t) \simeq \frac{C_{rr}}{\varepsilon^2 r_1^2}\{C_{rs} - \left(\frac{K^{(0)}_{12}}{\triangle_0^2}\right) K^{(0)}_{ss}(t)\ \}$$

がえられ，両者を組合せることによって，<u>残留循環</u> α' は

$$\overline{\alpha'} = -\frac{C_{rr}}{\varepsilon^2 r_1{}^2}\frac{K^{(0)}_{12}}{\triangle_0}\left(1 + \frac{K^{(0)}_{21} - K^{(0)}_{12}}{2\triangle_0{}^{1/2}}\right)$$

となる。従って

$$\overline{\alpha'}\cdot\overline{A} \simeq -\frac{1}{4\triangle_0}\ \overline{\dot{y}(t)^2 D^{(0)}_{rr}(t)}\ (2\triangle_0{}^{1/2} + K^{(0)}_{21} - K^{(0)}_{12})$$

なる関係がえられる。これは $\overline{\alpha'}$ と $\overline{A}$ とが系の循環をあらわすという意味で元来同性質の量であり，臨界点においてその役割を交代することを示している。

なお，揺ぎの計算に対しても reductive perturbation の方法を適用して，系統的に論ずることが出来るが，これについては研究室の増山君が続いて報告する。

参 考 文 献

1) K. Tomita and H. Tomita, Physics Letters **46A**, 265 (1973) ; Progr. Theor. Phys. **51**,

1931 (1974).

2) K. Tomita, T. Ohta and H. Tomita, Progr. Theor. Phys. **52**, 737 (1974).

3) K. Tomita, T. Ohta and H. Tomita, Progr. Theor. Phys. **52**, (1974).

附記：§1については北原和夫君，§2については太田隆夫君の寄与が大きい。

Reductive Perturbation による「揺ぎ」の計算

京大・理* 増 山 博 行

Kuramoto − Tsuzukiによって化学反応モデルにreductive perturbationが応用された。この方法で転移点近傍の「揺ぎ」が系統的に求まる。すなわち，ある外部変数Pが臨界値P_cを越えると，secular motion $\boldsymbol{y}$ が一様状態の branchから，時間的もしくは空間的振動が除々に成長していく場合，$\boldsymbol{y}$は ε の巾で展開される。($\varepsilon^2 = \dfrac{P-P_c}{P_c}$) そして $0(\varepsilon)$ の項の振巾Wは TDGL 型方程式の解として与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial T} W = \left(\alpha + \delta \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right) W - \beta W^2 W^*$$

ここで，$T = \varepsilon^2 t$, $R = \varepsilon r$ 。$\boldsymbol{y}$が分ると，「揺ぎ」σを与える方程式に，reductive perturbation を施すことによって，$\sigma = \varepsilon^{-2} (\xi + 0(\varepsilon))$ の形で σが求まる。PLNモデルで具体的に計算した結果は，hard mode insta の場合既に求められている数値計算値とよく合っている。

soft mode insta. の場合も計算した。詳細は別の機会に発表の予定。