# 「ソリトン解をもつ非線形波動方程式」

立命大　広 田 良 吾

1973年に Scott, Chu and Mc Laughlin ( Proc. IEEE , **61** 1443 (1973) ) が当時としての最新の情報を集めて急速に発展するソリトン研究の現状を Review した時,ソリトン解 ( 衝突の前後で波形を変えない非線形パルス波 ) をもつ非線形分散性波動方程式として数え上げたのは次の 9 ケの方程式であった。

A 1. Korteweg − de Vries Eq.

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0$$

A 2. Boussinesq Eq.

$$W_{tt} - W_{xx} - 6(W^2)_{xx} - W_{xxxx} = 0$$

A 3. Toda Eq.

$$m\frac{d^2 r_n}{dt^2} = a\left[2e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}} - e^{-br_{n-1}}\right]$$

m, a, b は常数。

B 1. Modified Korteweg − de Vries Eq.

$$V_t + V^2 V_x + V_{xxx} = 0.$$

B 2. はしご形非線形 LC 回路方程式

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{1+V_n^2}\,\frac{dV_n}{dt} &= I_n - I_{n+1} \\ \frac{1}{1+I_n^2}\,\frac{dI_n}{dt} &= V_{n-1} - V_n. \end{aligned}\right.$$

C 1. Sēne − gordon Eq.

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi$$

C 2. SIT Eq.

$$\varepsilon_t + \varepsilon_x = \langle P \rangle$$

$$P_t = \varepsilon n - \triangle \omega Q$$

$$Q_t = \triangle \omega P, \quad n_t = -\varepsilon P$$

$$\langle P \rangle \equiv n_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(\triangle\omega, x, t)\, d\triangle\omega$$

D 1. Nonlinear Schrödinger Eq.

$$i\psi_t + \psi_{xx} + K|\psi|^2\psi = 0 \quad K > 0.$$

D 2. Hirota Eq.

$$i\phi_t + i3\alpha|\phi|^2\phi_x + \rho\phi_{xx} + i\sigma\phi_{xxx} + \delta|\phi|^2\phi = 0$$

$$\alpha\rho = \sigma\delta.$$

最近和達氏が「ソリトン研究の現状」（科学3月号 p. 130（1975））に詳しく述べられたように，その後のソリトン研究は長足の進歩をとげ，一つの体系にまとめられつつある。

筆者はあるクラスの非線形発展方程式は，適当な変数変換による次の形の双一次形式の微分方程式に変換され，

$$F\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x, t)\, g(x', t')_{\mathrm{at}\, x = x',\ t = t'} = 0 ,$$

この方程式を解いてソリトン解を求めうる事を示した。上述の 9 ケの方程式は全部この方法で解けるが，最近の研究で，次に列記する方程式もこの方法で解ける（少なくとも 2 − ソリトン解をもつ）ことが発見された。（C 4.を除いて全部未発表）

A 4.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{U_n}{1 + U_n} = W_{n-\frac{1}{2}} - W_{n+\frac{1}{2}} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{W_n}{1 + W_n} = U_{n-\frac{1}{2}} - U_{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

A 5.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \log(\lambda_1 + V_n) = i_n - i_{n+1} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} \log(\lambda_2 + i_n) = V_{n-1} - V_n \end{cases}$$

$\lambda_1$, $\lambda_2$ は常数，この方程式について，大黒，水島両氏による計算機の結果がある（To be appeared in J. J. A. P（1975））.

C 3.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} + V_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = iq\,\varphi_2\,\varphi_3 \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} + V_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = iq\,\varphi_1\,\varphi_3^* \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial t} + V_3 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} = iq\,\varphi_1\,\varphi_2^* \end{cases}$$

筆者の方法では，$V_1 \neq V_2 \neq V_3$ の時，N－ソリトン解に相当するものは未だ求められていないが，二つのパルス波の衝突を表わす解は得られた。このパルス波は衝突の前後で波形が変るのでソリトンと呼べるかどうか分らない。

C 4. $\quad \phi_{xx} + \phi_{yy} - \phi_{tt} = \sin\varphi$

空間的に２次元であるので逆散乱法の適用は困難と思われる。

D 3. $\quad i\psi_t + \psi_{xx} + K|\psi|^2\psi = 0 \qquad \underline{(K < 0)}$

この方程式の解は Envelope － Soliton ではなく Envelope － hole と呼ぶにふさわしい。

（3/13 / 75）