Multi−Time Scale 法のゆらぎの問題への応用

京大基研　川　崎　恭　治

§1. 緒　　言

先月と今月，物性研究への投稿皆無の月がつづいた。しばらく前までは月1，2篇づつ投稿が来ていたのでこの傾向がつづく事を予想し原稿を集める努力を休んでいたのであるが，こう云う事になると又考え直さなければならなくなる。物性研究編集の一つのむづかしさは，運転資金が殆どないので投稿に見合った原稿の集め方をしなければならず，このように投稿の見通しがたたない時には載せる材料が殆どない事もおこりうる。「素粒子論研究」の方ではこのような問題は殆どないようである。聞く所では「素研」に出た論文は批判しないのが原則だそうで，放っておいたら紛失してしまうような計算結果をメモ代りに「素研」にごく気軽に載せているとの事です。物性の人は皆整理整頓がよいのか，或は何か書こうものならやっつけてやろうと待っているこわい先生の目を意識して居るのか，とにかく投稿が少ないのは編集に関係している者にとって大変残念に思います。そう云う事で，以下ではメモのつもりで紙面を利用させていただく事にします。メモですから論文の体裁にはなってないし，文献もいいかげんである。

§2. 本　　論

multi-time scaleの方法，或は特に最近ではreductive perturbationの方法は，元々気体運動論で使われ，最近では流体力学，又は化学反応等の不安定点近傍を論ずるのによく使われている。しかし今までは主にマクロな平均の運動について議論されて来たし，又ゆらぎの効果を入れる時もマクロな運動にrandam farceを入れた形で論じられた。ここではいきなりFokker-Planck形の方程式に応用する方法をvan dor Pol振動子について例示する。randam forceを入れてやる場合と本質的には同等であると思うが，こまかくは調べていない。先づvan der Pol oscillatorとして

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-\beta x^2)\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \tag{1}$$

を考える。但し $0<\varepsilon\ll 1$, $\beta>0$.

$|x|$が小さい時には振巾は $\gamma=\varepsilon\omega_0/2$ なる成長率をもって増大する。二つの特性時間は ω_0^{-1} と γ^{-1} で

$$\gamma^{-1}/\omega_0^{-1}=2/\varepsilon\gg 1 \tag{2}$$

そこで multi-time scale $\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \cdots\cdots$ を

$$d\tau_0/dt=1,\quad d\tau_1/dt=\varepsilon,\quad d\tau_2/dt=\varepsilon^2,\ \cdots\cdots \tag{3}$$

で導入する。(1) の解を

$$x=x^{(0)}(\tau_0,\tau_1,\cdots)+\varepsilon x^{(1)}(\tau_0,\tau_1,\cdots)+\varepsilon^2 x^{(2)}(\tau_0,\tau_1,\cdots) \tag{4}$$

の形におき，時間微分についても

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau_2}+\cdots \tag{5}$$

とし，これらを (1) に代入し ε の各オーダーをくらべて

$$[\partial^2/\partial\tau_0^2+\omega_0^2]\,x^{(0)}=0 \tag{6a}$$

$$[\partial^2/\partial\tau_0^2+\omega_0^2]\,x^{(1)}=-2\varepsilon\partial^2/\partial\tau_1\partial\tau_0\cdot x^{(0)}$$
$$+[1-\beta(x^{(0)})^2]\,\omega_0^2/\partial x_0\cdot x^{(0)} \tag{6b}$$

(6a) の解

$$x^{(0)}(\tau_0,\tau_1)=A(\tau_1)\cos[\omega_0\tau_0+\phi(\tau_1)]$$

を (6b) の右辺に入れて整理すると

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau_0^2}+\omega_0^2\right]x^{(1)}(\tau_0,\tau_1)=2\omega_0\left[\frac{\partial A}{\partial\tau_1}-\frac{\omega_0}{2}A\left(1-\frac{\beta A^2}{4}\right)\right]\sin(\omega_0\tau_0+\phi)$$
$$+2\omega_0\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}A\cos(\omega_0\tau_0+\phi)+\frac{\beta}{4}A^3\omega_0^2\sin 3(\omega_0\tau_0+\phi) \tag{7}$$

ここで右辺第1，第2項は左辺の振動子と同じ振動数 ω_0 もっているので共鳴をおこし

て，これから $x^{(1)}$ に $\tau_0\cos(\omega_0\tau_0+\phi)$，$\tau_0\sin(\omega_0\tau_0+\phi)$ のように振巾が早い時間 τ_0 に比例して増大する寄与を生ずる。この方法ではmulti-time を導入した事によって生じた余分の自由度を，丁度この様な困った寄与（secular term）を消すように選ぶ。即ち

$$\frac{\partial A}{\partial\tau_1}-\frac{\omega_0}{2}A\left(1-\frac{\beta A^2}{4}\right)=0 \tag{8a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}=0 \tag{8b}$$

これを解いて元の式に入れると

$$x(t)\cong A(\varepsilon t)\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{9}$$

但し ϕ は一定で

$$A(\varepsilon t)=\frac{4}{\beta}\left[1+\left(\frac{4}{\beta A_0^2}-1\right)\exp(-\omega_0\varepsilon\tau)\right]^{-1} \tag{10}$$

即ち振巾は長い時間をかけてゆっくり変化する。

以上はDavidson のプラズマの本に出ているものの要約である。以下ではこの方法を，(1) が stochastic な場合と拡張してみよう。そこで (1) に random force f(t) をつける。

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-\beta x^2)\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=f \tag{11}$$

ゆらぎの影響が小さいとして

$$\langle f(t)f(t')\rangle=2\varepsilon D\delta(t-t') \tag{12}$$

とする。これを，速度 v を導入して書き直そう。

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=v\\ \dot{v}&=\varepsilon(1-\beta x^2)\omega_0 v-\omega_0^2x+f\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

これを分布関数 P(v, x, t) に対する Fokker Planck Eq. の形とかく。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, x, t) = H(x, v) P(v, x, t) \tag{14}$$

$$H(x, v) \equiv \varepsilon D \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\partial}{\partial v}[\varepsilon(1-\beta x^2)\omega_0 v + \omega_0^2 x] - \frac{\partial}{\partial x} v$$

$$= H_0(x, v) + \varepsilon H_1(x, v) \tag{15}$$

但し

$$H_0(x, v) = -\frac{\partial}{\partial v}\omega_0^2 x - \frac{\partial}{\partial x} v \tag{16}$$

$$H_1(x, v) = D\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\partial}{\partial v}(1-\beta x^2)\omega_0 v \tag{17}$$

(4) に対応して

$$P(v, x, t) = P^{(0)}(v, x, \tau_0, \tau_1) + \varepsilon P^{(1)}(v, x, \tau_0, \tau_1) + \cdots \tag{18}$$

とおき (14) に代入する：

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \cdots\right][P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \cdots] = [H_0 + \varepsilon H_1][P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \cdots] \tag{19}$$

ε の各オーダーであわせて

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} P^{(0)} = H_0 P^{(0)} \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} - H_0\right) P^{(1)} = -\left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} - H_1\right) P^{(0)}, \quad \text{etc} \tag{21}$$

これらを $\tau_0, \tau_1, \cdots$ を独立変数とみなして解くと

$$P^{(0)}(\tau_0 - s, \tau_1) = e^{-sH_0} P^{(0)}(\tau_0, \tau_1) \tag{22}$$

$$P^{(1)}(\tau_0, \tau_1) = e^{\tau_0 H_0}\int_0^{\tau_0} ds\, e^{-sH_0}\left[H_1 P^{(0)}(s, \tau_1) - \frac{\partial}{\partial \tau_1} P^{(0)}(s, \tau_1)\right]$$

$$= \int_0^{\tau_0} ds\, e^{sH_0}\left[H_1 P^{(0)}(\tau_0 - s, \tau_1) - \frac{\partial}{\partial \tau_1} P^{(0)}(\tau_0 - s, \tau_1)\right] \tag{23}$$

(22) を (23) に代入して

$$P^{(1)}(\tau_0, \tau_1) = \tau_0 \{ \overline{H}_1^{\tau_0} - \frac{\partial}{\partial \tau_1} \} P^{(0)}(\tau_0, \tau_1) \tag{24}$$

但し

$$\overline{H}_1^{\tau_0} \equiv \tau_0^{-1} \int_0^{\tau_0} ds\, e^{sH_0} H_1 e^{-sH_0} \tag{25}$$

これまで何をやって来たかと云うと，$H(x, v)$を，ω_0 の特性振動数でおこる早い運動 H_0 及び $\varepsilon\omega_0$ の特性振動数でおこるおそい運動 εH_1 に分けると，早い変化は (22)で記述されその他にゆっくり変化する部分が (24) に含まれる。しかし (24)はそのままでは早い time-scale τ_0に比例して増加してしまう (但し H_1 の平均 $\overline{H}_1^{\tau_0}$ が $\tau_0 \gg \tau_1$で有限な operator $\overline{H}_1$ に近づくと仮定) のでこの secular term を除くように余分の自由度をきめる。即ち更に $\tau_0 \gg \tau_1$ で $P^{(0)}(\tau_0, \tau_1)$ もある有限な τ_1 の関係 $\overline{P}^{(0)}(\tau_1)$ に近づくとすると

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} \overline{P}^{(0)}(\tau_1) = \overline{H}_1 \overline{P}^{(0)}(\tau_1) \tag{26}$$

このおそい変化をきめる stochastic operator $\overline{H}_1$ は H_1 を H_0であらわされる早い運動について平均したものに他ならない。H_0 での運動は，これがゆらぎを含まない単純な調和振動子になっている事から直ちに求められる：

$$\left.\begin{aligned} v &= \dot{x} = [x, H_0] \\ \dot{v} &= [v, H_0] = \omega_0^2 x \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

だから

$$\left.\begin{aligned} e^{sH_0} x e^{-sH_0} &\equiv x^{(0)}(-s) = A\cos(-\omega_0 s + \phi) \\ e^{sH_0} v e^{-sH_0} &\equiv v^{(0)}(-s) = -\omega_0 A\sin(-\omega_0 s + \phi) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

但し

$$A = [x^2 + (v/\omega_0)^2]^{1/2}, \quad \phi = -\tan^{-1}(v/x\omega_0) \tag{29}$$

即ち

$$\left.\begin{aligned} x^{(0)}(-s) &= x\cos\omega_0 s - v\frac{\sin\omega_0 s}{\omega_0} \\ v^{(0)}(-s) &= x\omega_0 \sin\omega_0 s + v\cos\omega_0 s \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

同様にして

$$e^{sH_0}\frac{\partial}{\partial v}\,e^{-sH_0}=\frac{\sin\omega_0 s}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}+\cos\omega_0 s\,\frac{\partial}{\partial v} \tag{31}$$

これらの結果を(25)に代入して $\tau_0\to\infty$ ととると

$$\overline{H}_1=\frac{D}{2}\Big[\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big]-\frac{\omega_0}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\,x+\frac{\partial}{\partial v}\,v\Big)\Big[1-\frac{\beta}{4}\Big(x^2+\frac{v^2}{\omega_0^2}\Big)\Big] \tag{32}$$

これがおそい運動を記述する stochastic operator である。x，v の代りに変数 A, ϕ を用いればより見通しがよくなる：

$$\overline{H}_1=\frac{D}{2\omega_0^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial A^2}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial A}+\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big)-\frac{\omega_0}{2}\Big(1+\frac{\partial}{\partial A}A\Big)\Big(1-\frac{\beta}{4}A^2\Big) \tag{33}$$

A，ϕ の分布関数 $P(A,\phi)$ は

$$P(x,v)\,dv\,dx=P(x,v)\,\omega_0 A\,dA\,d\phi=P(A,\phi)\,dA\,d\phi \tag{34}$$

即ち

$$P(A,\phi)=\omega_0 AP(x,v) \tag{35}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial t}P(A,\phi,t)=\overline{H}(A,\phi)P(A,\phi) \tag{36}$$

$$\overline{H}(A,\phi)=A\overline{H}_1A^{-1}$$

$$=\frac{D}{2\omega_0^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial A^2}-\frac{\partial}{\partial A}\frac{1}{A}+\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big)-\frac{\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial A}A\Big(1-\frac{\beta}{4}A^2\Big) \tag{37}$$

これは正に rotating wave van der Pol oscillator (RWVP) として知られているもので Laser 発振[1] の問題や回路の発振[2] に関連して議論されている。特に $P(A,\phi)$ が位相 ϕ について一様な時 $[P=P(A)]$ には

$$\frac{\partial}{\partial t}P(A)=\frac{\partial}{\partial A}\Big[\frac{D}{2\omega_0^2}\Big(\frac{\partial}{\partial A}-\frac{1}{A}\Big)-\frac{\omega_0}{2}A\Big(1-\frac{\beta}{4}A^2\Big)\Big]P(A) \tag{38}$$

この定常解は

$$P_{st}(A) = \mathrm{const} \cdot A \exp[\alpha A^2 - \gamma A^4]$$
$$\alpha \equiv \omega_0^3/2D, \quad \gamma \equiv \omega_0^3 \beta/16D$$

これは α が負から正に移る時不安定になる。[2]

ここでは空間的変化のある場合は考えなかった。しかしその様な場合，特にBénardの問題や化学反応系にも応用できると思われるがまだ考えていない。

§3. 結　　論

ここに書いた様なつまらぬ話でも結構ですから気軽に投稿される事を期待します。

文　　献

1) R. D. Hempstead and M. Lax. Phys. Rev. **(6)**, (1967) 350
M. Lax. Tokyo Summer Lectures (R. Kubo and H. Kamimura, eds.) shokabo (1967)

2) T. Kawakubo and Shigeharu Kabashima "Stochastic Processes in Self-Excited Oscillation" preprint